INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIII. BAND ZWEITES HEFT 1955

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 11,80

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Rittnerstr. 12
Professor **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Walter-von-Dyck-Platz 1
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einsenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 2440

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 249251

Inhalt:

Seite

Heinrich G., u. *K. Desoyer*, Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen. Mit 5 Textabbildungen 73

Nasitta, Kh., Über die Dimensionierung dünner Kreisplatten unter exzentrisch aufgebrachten Einzellasten. Mit 9 Textabbildungen 85

Nickel, K., Über spezielle Systeme von Tragflügelgittern II. (Theorie der dünnen Profile). Mit 11 Textabbildungen 102

Vogel, W., Ein graphisches Verfahren zur Lösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Mit 3 Textabbildungen 119

Jindra, F., Der ebene Verzerrungszustand des dickwandigen Rohres bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz. Mit 3 Textabbildungen 122

Okubo, H., Die Formzahlen tordierter Wellen mit mehreren Nuten. Mit 4 Textabbildungen 130

Rüdiger, D., Die strenge Theorie anisotroper prismatischer Faltwerke. Mit 12 Textabbildungen 133

INGENIEUR-ARCHIV

XXIII. BAND ZWEITES HEFT 1955

Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen.

Von G. Heinrich und K. Desoyer.

1. Einleitung. In den Lehrbüchern der Hydraulik geht man bei der Behandlung der Grundwasserbewegung im allgemeinen vom *Darcy*-Gesetz aus, ohne auf eine genaue Analyse der auf das Wasser und den Festkörper wirkenden Kräfte einzugehen. Dies führt dazu, daß bei den verschiedenen Autoren ganz verschiedene Ansichten über den „Strömungsdruck" herrschen, obwohl die Hydromechanik klare und eindeutig definierte Begriffe zur Erfassung des hier vorliegenden Kräftespieles zur Verfügung stellt. Auch werden die bei der Ableitung der Gleichungen für die Grundwasserströmung zugrunde gelegten vereinfachenden Annahmen meist nicht genügend genau präzisiert. Insbesondere werden bei der Untersuchung instationärer Grundwasserströmungen gewisse Vereinfachungen eingeführt, die in vielen Fällen praktisch nicht zutreffen. Man kommt jedoch ohne diese Vereinfachungen zu einer bedeutend übersichtlicheren und theoretisch weitaus mehr befriedigenden Lösung der Probleme der instationären Grundwasserströmung.

Es soll daher im folgenden nach einer Analyse des bei der Grundwasserströmung auftretenden Kräftespiels eine verallgemeinerte Theorie der Grundwasserströmung, insbesondere der Spiegelbewegung bei instationären Strömungen entwickelt werden. Eine Auswertung mittels der Relaxationsmethode soll in einer folgenden Arbeit an praktischen Beispielen gezeigt werden. Eine genauere Kenntnis der instationären Strömungszustände ist z. B. für die Beurteilung der Rutschgefahr von Dämmen sowie für die Abschätzung der Ergiebigkeit von Brunnenanlagen von praktischer Bedeutung.

2. Analyse der wirkenden Kräfte und deren Gleichgewicht. Um zu einer methodisch einwandfreien Darstellung der Grundwasserströmung zu gelangen, ist es wesentlich, zwischen Mikro- und Makroströmung zu unterscheiden. Unter Mikroströmung soll die tatsächlich auftretende Bewegung der Flüssigkeit in dem unregelmäßigen Gefüge des Festkörpers verstanden werden. Diese Mikroströmung ist nur insoweit von Interesse, als sie durch geeignete Mittelwertsbildungen durch eine Makroströmung ersetzt werden kann. Um zu geeigneten Mittelwertsbildungen zu gelangen, müssen die für die Untersuchung der Makroströmung zugrunde gelegten Volum- und Oberflächenelemente einerseits groß genug gewählt werden, damit eine Mittelung ohne unzulässig große Streuungen möglich wird, andererseits klein genug gehalten werden, um die Abhängigkeit der durch Mittelung gewonnenen Größen vom Ort wiederzugeben. Es muß dabei vorausgesetzt werden, daß die Volumina der Einzelkörner des durchströmten Festkörpers über das zugrunde gelegte Volumelement statistisch verteilt und genügend klein sind gegenüber dem Gesamtvolumen des betrachteten Bereiches, so daß die obigen Mittelwertsbildungen zulässig sind.

Es ist wesentlich, eine genaue Unterscheidung zu treffen zwischen den Kräften, die auf die Flüssigkeit, und jenen, die auf den Festkörper wirken.

Es wird angenommen: 1. Die Körner des Festkörpers, die an sich beliebige Formen aufweisen können, berühren einander praktisch punktförmig[1]. 2. Der Festkörper befindet sich dauernd in Ruhe. 3. Die Flüssigkeit sei praktisch inkompressibel und homogen. 4. Die in der Mikroströmung auftretenden Kapillarkräfte werden nicht berücksichtigt, es wird also der sog. Kapillarsaum außer acht gelassen. Desgleichen sollen andere Kräfte molekularer Natur (z. B. elektrische) wie sie in den feindispersen Anteilen des Bodens auftreten können[2], nicht in Betracht gezogen werden. 5. Im Inneren der Strömung soll die Flüssigkeit die Poren des Fest-

[1] Eine Erweiterung auf allgemeine Festkörperskelette soll in einem nachfolgenden ergänzenden Aufsatz durchgeführt werden.

[2] Vgl. *J. Kozeny*, Hydraulik, S. 381, Wien 1953.

körpers vollständig erfüllen. 6. Die Filterwirkung des Festkörpers sei genügend groß, so daß eine „quasistationäre Strömung", bei der die Trägheitskräfte in der Flüssigkeit gegenüber den anderen Kräften vernachlässigt werden können, bereits bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten auftritt. Bei gewissen i. a. sehr kurz dauernden Anlaufzuständen darf man die Trägheitskräfte nicht mehr vernachlässigen, (vgl. Abschn. 5). 7. Eine Verdunstung der Flüssigkeit wird nicht berücksichtigt.

Wir denken uns nun aus dem System Festkörper und Flüssigkeit (es werde im folgenden immer als „Gemisch" bezeichnet) ein beliebiges endliches Volumen herausgegriffen, aber so, daß die Begrenzungsfläche kein Korn des Festkörpers durchschneidet. Es sollen nun für den auf diese Art abgegrenzten Flüssigkeitskörper die Bewegungsgleichungen und für den zugehörigen Teil des Festkörpers die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden. In der makroskopischen Betrachtung teilen wir die auf den abgegrenzten Flüssigkeitskörper wirkenden Kräfte ein in Oberflächenkräfte, Volumkräfte und Quasivolumkräfte. Die Oberflächenkräfte wirken an der Begrenzungsfläche des abgegrenzten Volumens. Da zufolge der statistischen Verteilung der Körner der Quergradient der Geschwindigkeit der Mikroströmung in Richtung der äußeren Normalen des Flächenelementes mit gleicher Häufigkeit positiv und negativ sein wird, werden sich bei der makroskopischen Betrachtung die Schubspannungen über ein Flächenelement gerade aufheben. Für die Makroströmung sind daher die an der Begrenzungsfläche wirkenden Oberflächenkräfte reine Druckkräfte. Da die Begrenzungsfläche so gelegt wurde, daß sie kein Korn durchschneidet, wirkt nach Voraussetzung 1 dieser Druck auf die gesamte Schnittfläche. Als Volumkraft kommt praktisch nur die Schwerkraft in Betracht. Die in der Mikroströmung von den Körnern auf die Flüssigkeit ausgeübten Kräfte werden in der Makroströmung als Quasivolumkräfte über das ganze Volumen verteilt gedacht. Entsprechend der Aufteilung dieser Kräfte in der Mikroströmung in Normaldrücke und Reibungen sollen auch die Quasivolumkräfte in der Makroströmung in Normal- und Reibungskräfte unterteilt werden. Im folgenden sei $d\mathfrak{o}$ der nach außen positiv gezählte Vektor des Oberflächenelements der Begrenzungsfläche, dV ein Volumelement des Gemisches, n das auf die Volumeinheit des Gemisches bezogene Porenvolumen[1], das i. a. eine Funktion des Ortes sein kann, aber nach Voraussetzung 2 keine Funktion der Zeit, g die Fallbeschleunigung, γ_w das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, p der in der Flüssigkeit herrschende Überdruck über den Atmosphärendruck, U das Potential der Schwerkraft bezogen auf die Masseneinheit der Flüssigkeit, $\mathfrak{R}_w$ die von der Hautreibung an den Körnern herrührende, auf die Flüssigkeit wirkende Quasivolumkraft, bezogen auf die Volumeinheit des Gemisches, ∇ der bekannte Vektoroperator. Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich die Resultante der Oberflächenkräfte zu $-\int p\, d\mathfrak{o}$, die der Schwerkraft zu $-\int \frac{\gamma_w}{g} n \nabla U\, dV$, die von der Hautreibung herrührende Quasivolumkraft zu $\int \mathfrak{R}_w\, dV$ und die von den Normaldrücken der Körner auf die Flüssigkeit herrührende Quasivolumkraft zu $\int (1-n) \nabla p\, dV$, wobei die Integrationen über die Oberfläche bzw. das Volumen des herausgegriffenen Gemischkörpers zu erstrecken sind.

Der Ausdruck $\int (1-n) \nabla p\, dV$ ergibt sich auf folgende Weise: in einem Volumelement dV der Makroströmung mögen sich im Mittel N Körner befinden. Die Resultante der von diesen Körnern auf die Flüssigkeit ausgeübten Druckkräfte ist dann $\sum_{j=1}^{N} \oint p\, d\mathfrak{o}_j$ wobei $d\mathfrak{o}_j$ einen nach außen positiv gezählten Vektor eines Oberflächenelementes des j-ten Kornes bedeutet. Nach Anwendung des *Gauß*schen Satzes erhält man daraus

$$\sum_{j=1}^{N} \int \nabla p\, dV_{Kj} = \nabla p \sum_{j=1}^{N} V_{Kj},$$

wobei dV_{Kj} das Volumelement des j-ten Kornes und V_{Kj} das ganze Volumen des j-ten Kornes bedeutet. Die obige Gleichsetzung ist zulässig, da der makroskopische Wert ∇p über den Bereich dV als konstant angesehen werden kann. Ferner gilt die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{N} V_{Kj} = (1-n)\, dV.$$

[1] Bei fein verteilten Böden kommt hierfür nur das sog. „spannungslose Porenvolumen" in Frage, das kleiner ist als das wahre Porenvolumen, vgl. *Kozeny* a. a. O., S. 381. Das an die Körner gebundene hygroskopische Wasser soll in diesem Fall als zum System des Festkörpers gehörig angesehen werden.

Aus diesen Gleichungen folgt demnach

$$\sum_{j=1}^{N} \oint p \, d\mathfrak{v}_j = (1 - n) \, \nabla p \, dV' .$$

Da bei Vernachlässigung der Trägheitskräfte die angegebenen Kräfte für jedes beliebig herausgegriffene Volumen im Gleichgewicht stehen müssen, ergibt sich für die Flüssigkeit die Beziehung

$$- \int p \, d\mathfrak{v} - \int \frac{\gamma_w}{g} n \, \nabla U \, dV + \int \Re_w \, dV + \int (1 - n) \, \nabla p \, dV = 0 .$$

Durch Anwendung des *Gauß*schen Satzes auf das erste Glied erhält man

$$\int \left[- \nabla p - \frac{\gamma_w}{g} n \, \nabla U + \Re_w + (1 - n) \, \nabla p \right] dV = 0 .$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Integrationsbereich gelten muß, so folgt schließlich

$$\Re_w = n \, \nabla \left(\frac{\gamma_w}{g} U + p \right) . \tag{1}$$

Man sieht aus (1), daß das Feld der Kräfte $\Re_w$ bei konstantem Porenvolumen n ein Potentialfeld ist.

Die auf den abgegrenzten Teil des Festkörpers wirkenden Kräfte sollen ebenfalls in Oberflächenkräfte, Volumkräfte und Quasivolumkräfte eingeteilt werden. Die Oberflächenkräfte erhält man durch Mittelung der Berührungskräfte zwischen den Körnern, die beiderseits eines Oberflächenelements von geeigneter Größe liegen. Als Volumkraft kommt praktisch nur die auf die Körner wirkende Schwerkraft in Frage. Die Reaktionskräfte der auf die Flüssigkeit wirkenden Quasivolumkräfte (Normal- und Reibungskraft) wirken auf den Festkörper zurück.

Da i. a. von Korn zu Korn nicht nur Normaldrücke, sondern auch Reibungs- und Kohäsionskräfte übertragen werden, bilden die über ein Oberflächenelement gemittelten Korn-zu-Korn-Kräfte ein allgemeines Spannungsfeld, das durch einen symmetrischen Spannungsaffinor $\mathfrak{S}_K$ gekennzeichnet werden soll. Es ist dann [1] $\mathfrak{S}_K \cdot d\mathfrak{v}$ der durch das Oberflächenelement $d\mathfrak{v}$ übertragene Kraftvektor. $\int \mathfrak{S}_K \cdot d\mathfrak{v}$ bedeutet die Resultante der auf die Begrenzungsfläche des herausgeschnittenen Festkörperteiles wirkenden Oberflächenkräfte (Korn-zu-Korn-Kräfte). Die Resultante der auf den herausgeschnittenen Festkörper wirkenden Schwerkräfte ist $- \int \frac{(1 - n) \gamma_K}{g} \nabla U \, dV$, worin γ_K das mittlere spezifische Gewicht des Kornmaterials bedeutet[2], das vom Ort abhängen kann, nach Vor. 2 aber nicht von der Zeit. Die beiden Anteile der Quasivolumkräfte sind bis auf das Vorzeichen dieselben, wie die auf die Flüssigkeit wirkenden. Die Gleichgewichtsbedingung für den herausgeschnittenen Festkörperteil lautet demnach

$$\int \mathfrak{S}_K \cdot d\mathfrak{v} - \int \frac{(1 - n) \gamma_K}{g} \nabla U \, dV - \int \Re_w \, dV - \int (1 - n) \, \nabla p \, dV = 0 .$$

Durch Umformung des ersten Gliedes mit Hilfe des *Gauß*schen Satzes erhält man

$$\int \left[\nabla \cdot \mathfrak{S}_K - \frac{(1 - n) \gamma_K}{g} \nabla U - \Re_w - (1 - n) \, \nabla p \right] dV = 0 .$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige Volumen gelten muß, so folgt

$$\nabla \cdot \mathfrak{S}_K = \frac{(1 - n) \gamma_K}{g} \nabla U + \Re_w + (1 - n) \, \nabla p . \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich schließlich

$$\nabla \cdot \mathfrak{S}_K = \frac{\gamma_K - n (\gamma_K - \gamma_w)}{g} \nabla U + \nabla p . \tag{3}$$

[1] Es bedeuten im folgenden das Zeichen · das skalare Produkt, ·· das doppeltskalare Produkt und das Zeichen ∘ das dyadische Produkt.

[2] Bei feinverteilten Böden wäre unter γ_K das mittlere spezifische Gewicht von Kornmaterial samt dem gebundenen Wasser zu verstehen (vgl. Fußnote 1, S. 74).

Für den Spezialfall, daß γ_K und n ortsunabhängig sind, läßt sich (3) auf die Form bringen

$$\nabla \cdot \left\{ \mathfrak{T}_K - \left[\frac{\gamma_K - n(\gamma_K - \gamma_w)}{g} U + p \right] \mathfrak{E} \right\} = 0 , \tag{3a}$$

worin $\mathfrak{E}$ den Einheitsaffinor bedeutet.

3. Das verallgemeinerte Filtergesetz. Es soll nun ein allgemeiner Zusammenhang zwischen der Reibungskraft $\mathfrak{R}_w$ und der Bewegung der Flüssigkeit hergestellt werden. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der Filtergeschwindigkeit ein. Für ihre Definition denken wir uns aus dem durchströmten Festkörper ein kleines Tetraeder (Abb. 1) herausgeschnitten, wobei die Achsen x, y, z ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bilden. Wir bezeichnen mit $d\mathfrak{O}$ den nach außen positiv gezählten Vektor des schrägen Flächenelements. Seine vektoriellen Komponenten $d\mathfrak{O}_x$, $d\mathfrak{O}_y$, $d\mathfrak{O}_z$ nach den drei Achsenrichtungen sind zugleich die nach innen positiv gezählten Vektoren der in den drei Koordinatenebenen liegenden Begrenzungsflächen. Wir bezeichnen mit $dq_0\,dt$ das während des Zeitelements dt durch die Fläche $d\mathfrak{O}$ hindurchtretende Flüssigkeitsvolumen, analog seien $dq_x\,dt$, $dq_y\,dt$, $dq_z\,dt$ die durch die in den Koordinatenebenen liegenden Flächen während dt eintretenden Flüssigkeitsvolumina. Nach Voraussetzung 3 gilt dann

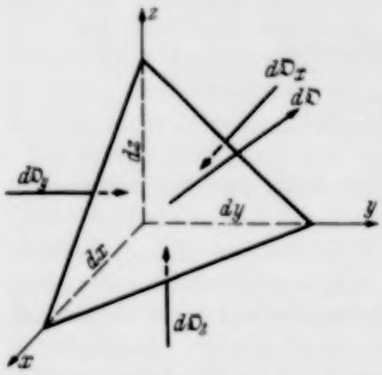

Abb. 1. Zur Einführung des Vektors der Filtergeschwindigkeit.

$$dq_0 = dq_x + dq_y + dq_z .$$

Bezeichnen nun v_x, v_y, v_z die auf die Flächeneinheit bezogenen Werte von dq_x, dq_y, dq_z, so kann man auch schreiben

$$dq_0 = |d\mathfrak{O}_x|\, v_x + |d\mathfrak{O}_y|\, v_y + |d\mathfrak{O}_z|\, v_z = \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{O} , \tag{4}$$

wobei $\mathfrak{v}$ den aus v_x, v_y, v_z gebildeten Vektor bedeutet. Da sich also dieser Vektor wie ein Geschwindigkeitsvektor verhält, soll er als Filtergeschwindigkeit bezeichnet werden. Man sieht, daß eine derartige Definition einer Filtergeschwindigkeit nur bei inkompressiblen Medien möglich ist.

Wir beschränken uns nun im folgenden auf solche Fälle, bei denen ein linearer Zusammenhang zwischen der Reibungskraft $\mathfrak{R}_w$ und der Filtergeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ besteht. Der allgemeinste lineare Zusammenhang zwischen den Vektorenfeldern $\mathfrak{R}_w$ und $\mathfrak{v}$ wird vermittelt durch einen Affinor $\mathfrak{A}$. Diesen Zusammenhang schreiben wir in der Form

$$\mathfrak{R}_w = - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{v} . \tag{5}$$

Damit ist die Möglichkeit der Berücksichtigung einer Anisotropie des Bodens (z. B. Schichtung) gegeben. Aus (1) und (5) folgt

$$n \nabla \left(\frac{\gamma_w}{g} U + p \right) = - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{v} \tag{6}$$

oder

$$\nabla \left(\frac{U}{g} + \frac{p}{\gamma_w} \right) = - \mathfrak{W} \cdot \mathfrak{v}$$

mit

$$\mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{A}}{n \gamma_w} . \tag{7}$$

$\mathfrak{W}$ soll als Widerstandsaffinor bezeichnet werden. Eine andere Form von (6) erhält man durch linksseitige Multiplikation mit dem Affinor

$$\mathfrak{W}^{-1} = \mathfrak{K} \tag{8}$$

Es ergibt sich

$$\mathfrak{v} = - \mathfrak{K} \cdot \nabla \left(\frac{U}{g} + \frac{p}{\gamma_w} \right) . \tag{9}$$

$\mathfrak{K}$ sei als Durchlässigkeitsaffinor bezeichnet; er wird im allgemeinsten Fall ein unsymmetrischer ortsabhängiger Affinor sein. Wenn längs einer Fläche zwei Festkörper aus verschiedenem Material aneinandergrenzen, ändert sich dort der Durchlässigkeitsaffinor $\mathfrak{K}$ unstetig. Wir fassen $\mathfrak{K}$ deshalb als eine stückweise stetige Funktion des Ortes auf.

$\mathfrak{K}$ habe in bezug auf ein beliebiges cartesisches Koordinatensystem (x, y, z) die Matrizendarstellung

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Wir setzen

$$\frac{U}{g} + \frac{p}{\gamma_w} = h \tag{11}$$

und nennen h die Standrohrspiegelhöhe, da sie die Spiegelhöhe in einem an der betreffenden Stelle errichteten Standrohr, gemessen von einem willkürlichen Nullniveau ($U = 0$) angibt (Abb. 2). Aus (9) und (11) ergibt sich

$$\mathfrak{v} = -\,\mathfrak{K} \cdot \nabla h\,. \tag{12}$$

Führt man den Vektor des Standrohrspiegelgefälles

$$\vec{J} = -\,\nabla h \tag{12a}$$

ein, so schreibt sich (12)

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{K} \cdot \vec{J}\,. \tag{12b}$$

Dies ist als eine Verallgemeinerung des bekannten *Darcy*schen Filtergesetzes anzusehen.

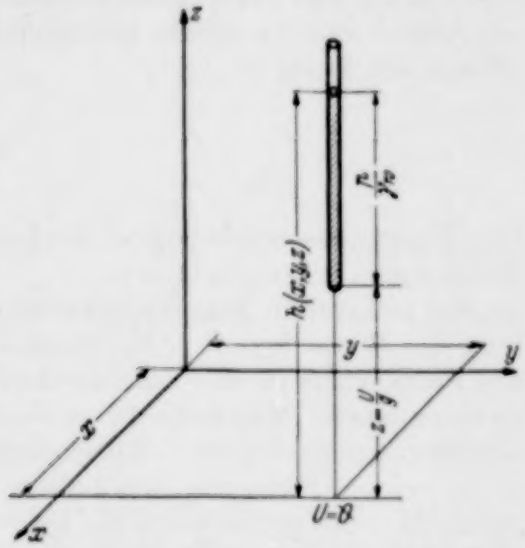

Abb. 2. Zur Definition der Standrohrspiegelhöhe.

Wenn im Festkörper keine Richtungsanisotropie vorliegt, kann man $\mathfrak{K} = k\,\mathfrak{E}$ setzen, dann spezialisiert sich (12) zu der Form

$$\mathfrak{v} = -\,k\,\nabla h = k\,\vec{J}\,, \tag{12c}$$

wobei k der in der Hydraulik als Durchlässigkeit bezeichnete Skalar ist [1]. Bezeichnet man mit v den Betrag von $\mathfrak{v}$ und mit J den Betrag von $\vec{J}$, dann erhält man aus (12c) die bekannte Form des *Darcy*-Gesetzes

$$v = k\,J\,. \tag{12d}$$

Aus (12c) ersieht man, daß in dem Spezialfall eines ortsunabhängigen k die Größe h die Rolle eines Geschwindigkeitspotentials übernimmt.

4. Die Gleichung für die Flüssigkeitsbewegung. Um zu einer Differentialgleichung für die Flüssigkeitsbewegung zu gelangen, gehen wir aus vom verallgemeinerten Filtergesetz in der Form (12). Da das Vektorfeld der Filtergeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ quellfrei ist, gilt

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} = 0\,. \tag{13}$$

Aus (12) und (13) folgt

$$\nabla \cdot (\mathfrak{K} \cdot \nabla h) = 0\,. \tag{14}$$

Dies ist die Differentialgleichung, der die Standrohrspiegelhöhe h genügen muß. Eine einfache Umformung von (14) liefert

$$(\nabla \cdot \mathfrak{K}) \cdot (\nabla h) + \mathfrak{K} \cdot\cdot\, (\nabla\,,\, \nabla)\, h = 0\,. \tag{15}$$

Führt man die in (15) angegebenen Operationen aus, so erhält man die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial k_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial k_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial k_{zx}}{\partial z}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial k_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial k_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial k_{zy}}{\partial z}\right)\frac{\partial h}{\partial y} + \left(\frac{\partial k_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial h_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial k_{zz}}{\partial z}\right)\frac{\partial h}{\partial z} \\ &+ k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_{yy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + (k_{xy} + k_{yx})\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} + (k_{yz} + k_{zy})\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial z} \\ &+ (k_{zx} + k_{xz})\frac{\partial^2 h}{\partial z\,\partial x} = 0\,. \end{aligned} \tag{16}$$

[1] Vgl. z. B. *Ph. Forchheimer*, Hydraulik, S. 53, 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1930. *J. Kozeny*, a. a. O. S. 389.

Für den praktisch wichtigen Spezialfall eines ortsunabhängigen Durchlässigkeitsaffinors erhält man

$$k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_{yy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+k_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}+(k_{xy}+k_{yx})\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}+(k_{yz}+k_{zy})\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial z}+(k_{zx}+k_{xz})\frac{\partial^2 h}{\partial z\,\partial x}=0\,. \tag{16a}$$

Wenn eine Richtungsanisotropie der Durchlässigkeit des Bodens vorliegt, so wird sie in praktischen Fällen meist durch einen symmetrischen Durchlässigkeitsaffinor $\mathfrak{K}$ wiedergegeben werden können. Das bedeutet, daß es drei aufeinander senkrecht stehende Richtungen gibt, in denen das Druckgefälle mit der Filtergeschwindigkeit richtungsgleich ist. Ist $\mathfrak{K}$ außerdem ortsunabhängig, so kann man eine generelle Hauptachsentransformation durchführen. Wir legen in die drei Hauptachsenrichtungen ein neues Koordinatensystem (ξ, η, ζ), das i. a. gegen die Achsen x, y, z verdreht sein wird. Im neuen Koordinatensystem erhält der Durchlässigkeitsaffinor die Form

$$\mathfrak{K}=\begin{pmatrix} k_{\xi\xi} & 0 & 0\\ 0 & k_{\eta\eta} & 0\\ 0 & 0 & k_{\zeta\zeta}\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Die Hauptachsenrichtungen werden sich in praktischen Fällen bereits aus dem Gefüge des Festkörpers erkennen lassen.

Bei bekannten Hauptachsenrichtungen ξ, η, ζ kann man nun zur experimentellen Ermittlung der Werte $k_{\xi\xi}$, $k_{\eta\eta}$, $k_{\zeta\zeta}$ einen in Richtung der Hauptachsen herausgeschnittenen Quader des Festkörpers in drei aufeinanderfolgenden Versuchen in den drei Richtungen ξ, η, ζ durchströmen lassen. Man mißt die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit der betreffenden Querschnitte durchströmenden Flüssigkeitsmengen (sie sind nach Definition gleich den Komponenten v_ξ, v_η, v_ζ der Filtergeschwindigkeit $\mathfrak{v}$) und bestimmt die zugehörigen Standrohrspiegelgefälle J_ξ, J_η, J_ζ. Es gelten dann die Beziehungen

$$v_\xi=k_{\xi\xi}\,J_\xi\,,\qquad v_\eta=k_{\eta\eta}\,J_\eta\,,\qquad v_\zeta=k_{\zeta\zeta}\,J_\zeta\,, \tag{18}$$

aus denen sich die Werte $k_{\xi\xi}$, $k_{\eta\eta}$ und $k_{\zeta\zeta}$ bestimmen. Da der Durchlässigkeitsaffinor im neuen Koordinatensystem (ξ, η, ζ) die Form (17) hat, geht (16a) über in

$$k_{\xi\xi}\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}+k_{\eta\eta}\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}+k_{\zeta\zeta}\frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2}=0\,. \tag{16b}$$

Um die Gleichung (16b) auf die Form der *Laplace*schen Differentialgleichung zu bringen, führen wir dimensionslose Werte für die Komponenten des Durchlässigkeitsaffinors ein durch die Beziehungen

$$k_{\xi\xi}=\sqrt[3]{K_{\mathrm{III}}}\,k^*_{\xi\xi}\,,\qquad k_{\eta\eta}=\sqrt[3]{K_{\mathrm{III}}}\,k^*_{\eta\eta}\,,\qquad k_{\zeta\zeta}=\sqrt[3]{K_{\mathrm{III}}}\,k^*_{\zeta\zeta} \tag{19}$$

mit $K_{\mathrm{III}}=k_{\xi\xi}\,k_{\eta\eta}\,k_{\zeta\zeta}$. K_{III} ist der dritte Skalar des Durchlässigkeitsaffinors.

Durch eine reine Dehnung des Koordinatensystems (ξ, η, ζ) vermittels der Transformationsgleichungen

$$\xi=\sqrt{k^*_{\xi\xi}}\,\bar{\xi}\,,\qquad \eta=\sqrt{k^*_{\eta\eta}}\,\bar{\eta}\,,\qquad \zeta=\sqrt{k^*_{\zeta\zeta}}\,\bar{\zeta} \tag{20}$$

geht (16b) über in die *Laplace*-Gleichung

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{\xi}^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{\eta}^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{\zeta}^2}=0\,. \tag{16c}$$

Im verzerrten Bereich verschwindet demnach die Anisotropie. In einer nachfolgenden Arbeit soll dies näher ausgeführt werden.

5. Die Randbedingungen und Anfangswerte für die Standrohrspiegelhöhe. In praktischen Fällen kommen folgende Randbedingungen [1] in Frage:

1. Die Randfläche ist undurchlässig. Sie stellt dann eine Stromlinienfläche dar.

2. Die Randfläche bildet eine Grenzfläche zwischen dem Strömungsbereich und der festkörperfreien Flüssigkeit mit statischer Druckverteilung. Hier wird auf die Randfläche die jeweilige hydrostatische Druckverteilung aufgeprägt.

[1] Vgl. *H. F. Rossbach*, Ing.-Arch. 12, (1941), S. 222; *G. Hamel*, Z. angew. Math. Mech. 14 (1934) S. 131.

3. Die Randfläche wird gebildet durch eine Fläche, längs der der Überdruck in der Flüssigkeit überall verschwindet ($p = 0$). Sie soll als Grundwasserspiegel bezeichnet werden. Bei instationären Strömungen wird dieser mit der Zeit veränderlich sein.

4. Die Randfläche ist eine Sickerfläche (Grenzfläche zwischen Festkörper und freier Atmosphäre). Es ist dann in ihr ebenfalls dauernd $p = 0$.

Es ist zweckmäßig, bei der Berechnung des Strömungsverlaufes von der Standrohrspiegelhöhe h auszugehen und es sollen daher die vier Randbedingungen für die Funktion h formuliert werden:

Randbedingung 1: Der Vektor der Filtergeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ muß stets normal auf dem Vektor der Flächennormale der undurchlässigen Randfläche stehen. Es sei $\mathfrak{n}$ ein beliebiger Vektor senkrecht zur Randfläche, seine Komponenten seien n_x, n_y, n_z bzw. n_ξ, n_η, n_ζ. Es gilt dann

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{v} = 0 \tag{21}$$

oder mit (12)

$$\mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{K} \cdot \nabla h) = 0 . \tag{22}$$

In Komponenten nach x, y, z lautet (22)

$$n_x\left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{xy}\frac{\partial h}{\partial y} + k_{xz}\frac{\partial h}{\partial z}\right) + n_y\left(k_{yx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{yy}\frac{\partial h}{\partial y} + k_{yz}\frac{\partial h}{\partial z}\right) + n_z\left(k_{zx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zy}\frac{\partial h}{\partial y} + k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right) = 0 , \tag{22a}$$

in Komponenten nach ξ, η, ζ

$$n_\xi k_{\xi\xi}\frac{\partial h}{\partial \xi} + n_\eta k_{\eta\eta}\frac{\partial h}{\partial \eta} + n_\zeta k_{\zeta\zeta}\frac{\partial h}{\partial \zeta} = 0 . \tag{22b}$$

Randbedingung 2: die Druckverteilung längs der Randfläche ist die jeweilige hydrostatische $p = p_h$, also bekannt. Aus (11) erhält man dann die Werte von h längs der Randfläche:

$$h = \frac{U}{g} + \frac{p_h}{\gamma_w} = \text{konst.} \tag{23}$$

Randbedingung 3 und 4: längs des Grundwasserspiegels und längs einer Sickerfläche ist $p = 0$ und daher nach (11)

$$h = \frac{U}{g} . \tag{24}$$

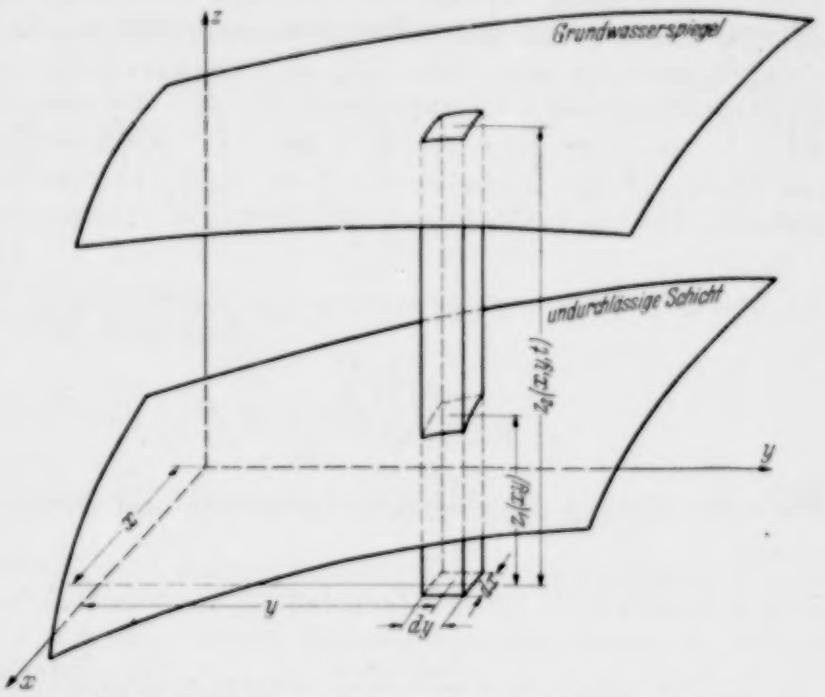

Abb. 3. Zur Ableitung der Bewegung des Grundwasserspiegels.

Die angegebenen Randbedingungen haben sowohl für den stationären als auch für den instationären Strömungszustand Gültigkeit. Beim instationären Zustand tritt jedoch die Besonderheit auf, daß die Grundwasserspiegelfläche (Randbedingung 3) selbst eine unbekannte Funktion der Zeit ist. Damit ist auch der Bereich, in dem die Differentialgleichung für h zu lösen ist, eine Funktion der Zeit. Hingegen muß die Grundwasserspiegelfläche zu Beginn der instationären Bewegung gegeben sein (Anfangsbedingung). Im stationären Fall hingegen ist die Form der Spiegelfläche unbekannt und muß bei der Lösung mitbestimmt werden.

Um für den instationären Fall die Bewegung des Grundwasserspiegels rechnerisch zu verfolgen, betrachten wir nach Abb. 3 ein Volumelement, das sich in vertikaler Richtung von einer undurchlässigen Fläche bis zum Grundwasserspiegel erstreckt. Wir legen ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) zugrunde, wobei die z-Achse vertikal nach oben zeigt. Den Koordinatenursprung legen wir der Übersicht halber so tief, daß die ganze undurchlässige Randfläche im betrachteten Strömungsbereich über der (x, y)-Ebene zu liegen kommt.

Die vorgegebene undurchlässige Randfläche habe die Gleichung $z_1 = z_1(x, y)$, die gesuchte Grundwasserspiegelfläche sei $z_2 = z_2(x, y, t)$. Wir setzen beide Funktionen als stückweise stetig und mindestens einmal nach x und y stückweise differentiierbar voraus. Das betrachtete Volumelement befinde sich an einer Stelle x, y, an der beide Flächen stetig und differentiierbar seien. Es soll nun für das betrachtete Volumelement eine Bilanz der ein- und austretenden Flüssigkeitsvolumina aufgestellt werden. Das in der x-Richtung während dt eintretende Flüssigkeitsvolumen beträgt

$$dy\,dt \int_{z_1 - \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{dx}{2}}^{z_2 - \frac{\partial z_2}{\partial x}\frac{dx}{2}} v_x\left(x - \frac{dx}{2}, y, z, t\right) dz ,$$

das austretende

$$dy\,dt \int_{z_1 + \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{dx}{2}}^{z_2 + \frac{\partial z_2}{\partial x}\frac{dx}{2}} v_x\left(x + \frac{dx}{2}, y, z, t\right) dz .$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für die y-Richtung. Zur Zeit t befindet sich in dem betrachteten Volumelement das Flüssigkeitsvolumen

$$V_w = dx\,dy \int_{z_1}^{z_2(t)} n(x, y, z)\, dz , \tag{25}$$

worin $n(x, y, z)$ das i. a. ortsabhängige Porenvolumen bedeutet. Während dt vermehrt sich demnach V_w um

$$\frac{\partial V_w}{\partial t} dt = n(x, y, z_2) \frac{\partial z_2}{\partial t} dx\,dy\,dt . \tag{25a}$$

Diese Vermehrung muß gleich sein dem Überschuß des in das Volumelement eintretenden Flüssigkeitsvolumens gegenüber dem austretenden. Es besteht somit die Beziehung

$$\begin{aligned} &dy \int_{z_1 - \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{dx}{2}}^{z_2 - \frac{\partial z_2}{\partial x}\frac{dx}{2}} v_x\left(x - \frac{dx}{2}, y, z, t\right) dz - dy \int_{z_1 + \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{dx}{2}}^{z_2 + \frac{\partial z_2}{\partial x}\frac{dx}{2}} v_x\left(x + \frac{dx}{2}, y, z, t\right) dz \\ &\quad + dx \int_{z_1 - \frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{dy}{2}}^{z_2 - \frac{\partial z_2}{\partial y}\frac{dy}{2}} v_y\left(x, y - \frac{dy}{2}, z, t\right) dz - dx \int_{z_1 + \frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{dy}{2}}^{z_2 + \frac{\partial z_2}{\partial y}\frac{dy}{2}} v_y\left(x, y + \frac{dy}{2}, z, t\right) dz \\ &\quad = n(x, y, z_2) \frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial t} dx\,dy . \end{aligned}$$

Nach Ausführung der obigen Integrationen und Division durch $dx\,dy$ ergibt sich

$$\begin{aligned} &-\int_{z_1}^{z_2(t)} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dz + v_x(x, y, z_1, t) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x} + v_y(x, y, z_1, t) \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y} \\ &\quad - v_x(x, y, z_2, t) \frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial x} - v_y(x, y, z_2, t) \frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial y} = n(x, y, z_2) \frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial t} . \end{aligned} \tag{26}$$

Bei Beachtung der Kontinuitätsgleichung (13) ergibt sich für den ersten Term links

$$-\int_{z_1}^{z_2(t)} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dz = \int_{z_1}^{z_2(t)} \frac{\partial v_z}{\partial z} dz = v_z(x, y, z_2, t) - v_z(x, y, z_1, t) . \tag{27}$$

Da die undurchlässige Randfläche $z_1(x, y)$ stets Stromlinienfläche sein muß, gilt für sie die Gleichung (21). Als Normalvektor wählen wir

$$\mathfrak{n} = -\frac{\partial z_1}{\partial x}\mathfrak{e}_x - \frac{\partial z_1}{\partial y}\mathfrak{e}_y + \mathfrak{e}_z .$$

Damit liefert (21):

$$- v_x(x, y, z_1, t)\frac{\partial z_1}{\partial x} - v_y(x, y, z_1, t)\frac{\partial z_1}{\partial y} + v_z(x, y, z_1, t) = 0\,. \tag{28}$$

Dies ist demnach die Bedingung dafür, daß die Fläche $z_1(x, y)$ eine Stromlinienfläche bildet.

Aus (26), (27) und (28) ergibt sich

$$\frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial t} = \frac{1}{n(x, y, z_2)}\left[v_z(x, y, z_2, t) - v_x(x, y, z_2, t)\frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial x} - v_y(x, y, z_2, t)\frac{\partial z_2(x, y, t)}{\partial y}\right]. \tag{29}$$

Dies stellt eine Differentialgleichung für die Bewegung des Grundwasserspiegels dar. Da zur Zeit $t = 0$ die Lage des Grundwasserspiegels vorgegeben ist, so kann mittels (29) die neue Lage nach der Zeit dt bestimmt werden, wenn $\mathfrak{v}(x, y, z_2, 0)$ bekannt ist.

In vielen Fällen denkt man sich die Grundwasserströmung zur Zeit $t = 0$ durch eine plötzliche Störung des Gleichgewichtszustandes ausgelöst. Dann ist zur Zeit $t = 0$ streng genommen noch überall $\mathfrak{v} = 0$. Da zufolge (5) dann auch die Reibungskraft $\mathfrak{R}_v$ noch Null ist, können die auf den Flüssigkeitskörper wirkenden Kräfte nicht im Gleichgewicht sein. Es werden daher Beschleunigungen auftreten, die zunächst nicht vernachlässigbar sind. Doch wird sehr bald ein quasistationärer Strömungszustand erreicht, da der Festkörper laut Voraussetzung 6 der Flüssigkeit schon bei kleinen Geschwindigkeiten einen genügend großen Reibungswiderstand entgegensetzt. Wir können daher diese „Anlaufzeit" im Vergleich zu dem Zeitmaß, in dem dann der quasistationäre Strömungsvorgang abläuft, unberücksichtigt lassen; es ist daher berechtigt, zur Zeit $t = 0$ bereits die Geschwindigkeitsverteilung der quasistationären Strömung in die Rechnung einzuführen. Um diese mit $\mathfrak{v}(x, y, z, 0)$ bezeichnete Geschwindigkeitsverteilung zu erhalten löst man (16) bzw. (16c) mit den zugehörigen Randbedingungen. Ist $h(x, y, z, 0)$ auf diese Weise ermittelt, so kann man aus (12) die Geschwindigkeitsverteilung $\mathfrak{v}(x, y, z_2, 0)$ finden. Man kann dann schrittweise dasselbe Verfahren für die aufeinanderfolgenden Zeitelemente, die man praktisch durch endliche Zeitintervalle approximieren wird, wiederholen und erhält so den zeitlichen Verlauf der instationären Strömung.

Man erkennt, daß die Strömung stationär wird, sobald der Klammerausdruck auf der rechten Seite von (29) verschwindet. Dies bedeutet, analog zu (28), daß dann der Grundwasserspiegel zu einer Stromlinienfläche geworden ist. Dies ist also gleichzeitig die Randbedingung für den Grundwasserspiegel im stationären Fall.

Es ist also durch die Differentialgleichung (16) bzw. (16c) in Verbindung mit den Rand- und Anfangsbedingungen und den Gleichungen (11), (12) und (29) das Problem der instationären Grundwasserströmung völlig bestimmt.

Man kann in der Beziehung (29) die Geschwindigkeitskomponenten vermittels (10) und (12) auch durch die Größe h ausdrücken. Man erhält dann

$$-\frac{\partial z_2}{\partial t} = \Big\{\frac{1}{n}\Big[\Big(k_{zx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zy}\frac{\partial h}{\partial y} + k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\Big) - \Big(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{xy}\frac{\partial h}{\partial y} + k_{xz}\frac{\partial h}{\partial z}\Big)\frac{\partial z_2}{\partial x} - \Big(k_{yx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{yy}\frac{\partial h}{\partial y} + k_{yz}\frac{\partial h}{\partial z}\Big)\frac{\partial z_2}{\partial y}\Big]\Big\}_{\text{längs der Spiegelfläche}}. \tag{30}$$

Dies gilt, ebenso wie (29), für einen beliebigen, i. a. unsymmetrischen, ortsabhängigen Durchlässigkeitsaffinor. Wenn der Durchlässigkeitsaffinor im betrachteten Strömungsbereich ortsunabhängig und symmetrisch ist, geht durch die generelle Hauptachsentransformation, die auf die Form (18) führt, die Beziehung (30) über in

$$-\frac{\partial z_2}{\partial t} = \frac{1}{n(x, y, z_2)}\Big\{k_{\zeta\zeta}\frac{\partial h}{\partial \zeta} - k_{\xi\xi}\frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial z_2}{\partial x} - k_{\eta\eta}\frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial z_2}{\partial y}\Big\}_{\text{längs der Spiegelfläche}}. \tag{30a}$$

Es ist auch möglich, in diesem Fall die Gleichung für die Bewegung des Grundwasserspiegels direkt im Hauptachsensystem (ξ, η, ζ) abzuleiten. Es muß hierbei nur vorausgesetzt werden, daß die Richtung einer der Achsen, z. B. die der ζ-Achse, die Grundwasserspiegelfläche im betrachteten Strömungsbereich überall schneidet. Gleichung (30a) nimmt dann mit den analogen Bezeichnungen die Form an:

$$-\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \frac{1}{n(\xi, \eta, \zeta_2)}\Big\{k_{\zeta\zeta}\frac{\partial h}{\partial \zeta} - k_{\xi\xi}\frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi} - k_{\eta\eta}\frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial \zeta_2}{\partial \eta}\Big\}_{\text{längs der Spiegelfläche}}. \tag{30b}$$

Ist der Festkörper homogen und isotrop, dann erübrigt sich eine Koordinatentransformation und es spezialisiert sich (30) zu

$$-\frac{\partial z_2}{\partial t} = \frac{k}{n}\left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial z_2}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)_{\text{längs der Spiegelfläche}}. \tag{30c}$$

Die bisherigen theoretischen Untersuchungen über die Grundwasserspiegelbewegung verwendeten stets den *Dupuit*schen Ansatz [1]. Bei diesem geht man von der vereinfachenden Annahme aus, daß das Standrohrspiegelgefälle für alle vertikal unter der betrachteten Stelle des Grundwasserspiegels liegenden Punkte gleich dem Spiegelgefälle an dieser Stelle sei. Diese Annahme trifft nur dann näherungsweise zu, wenn alle Stromlinien annähernd horizontal verlaufen. Außerdem geht beim Übergang in die stationäre Strömung nach dem *Dupuit*schen Ansatz die Spiegelfläche nicht in eine Stromlinienfläche über. Die hier entwickelten Beziehungen (30) bis (30c) hingegen sind von solchen Voraussetzungen über die Strömungsrichtung völlig frei und geben, wie schon erwähnt, den Übergang zur stationären Strömung richtig wieder.

Grenzen zwei verschiedene Festkörper 1 und 2 längs einer Fläche aneinander, so wird der Durchlässigkeitsaffinor beim Überschreiten dieser Grenzfläche eine unstetige Änderung erfahren. Das hat zur Folge, daß die Stromlinien an der Unstetigkeitsfläche gebrochen werden. Dieses „Brechungsgesetz" soll nun ermittelt werden. Wir betrachten einen beliebigen Punkt der Trennfläche und bezeichnen mit $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ den Durchlässigkeitsaffinor im Material 1 bzw. 2 an dieser Stelle. Mit den aus Abb. 4 ersichtlichen Bezeichnungen ergeben sich gemäß (12) die Beziehungen

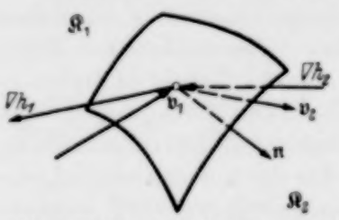

Abb. 4. Die Brechung der Stromlinien an einer Unstetigkeitsfläche (beiderseits anisotroper Boden).

$$\mathfrak{v}_1 = -\mathfrak{K}_1 \cdot \nabla h_1\,, \qquad \mathfrak{v}_2 = -\mathfrak{K}_2 \cdot \nabla h_2\,. \tag{31}$$

Aus Gründen der Kontinuität kann sich die Komponente der Filtergeschwindigkeit senkrecht zur Trennfläche beim Übergang von 1 in 2 nicht ändern. Es gilt daher

$$\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{v}_2 \cdot \mathfrak{n} \tag{32}$$

($\mathfrak{n}$ = Einheitsvektor senkrecht zur Trennfläche). Da h, ebenso wie p, eine eindeutige Funktion des Ortes sein muß, muß längs der Trennfläche $h_1 = h_2$ sein. Es müssen daher auch die Projektionen von ∇h_1 und ∇h_2 auf die Tangentialebene der Trennfläche im betreffenden Punkt übereinstimmen. Demnach gilt

$$\nabla h_1 - \mathfrak{n}\,(\nabla h_1 \cdot \mathfrak{n}) = \nabla h_2 - \mathfrak{n}\,(\nabla h_2 \cdot \mathfrak{n})\,. \tag{33}$$

Um zu einer Formulierung des „Brechungsgesetzes" zu kommen, setzen wir

$$\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{v}_1 \tag{34}$$

und bezeichnen $\mathfrak{B}$ als „Brechungsaffinor".

Wegen der Linearität des *Darcy*schen Gesetzes ist anzunehmen, daß $\mathfrak{B}$ nur von $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{n}$, nicht aber von $\mathfrak{v}_1$ abhängt.

Aus (32) und (34) folgt

$$\mathfrak{n} \cdot [(\mathfrak{E} - \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{v}_1] = 0\,. \tag{35}$$

Da (35) für beliebige Vektoren $\mathfrak{v}_1$ Gültigkeit haben muß, ist $\mathfrak{E} - \mathfrak{B}$ ein planarer Affinor, der in der Form

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{B} = (\mathfrak{s}, \mathfrak{q}) + (\mathfrak{t}, \mathfrak{r}) \tag{36}$$

geschrieben werden kann [2]. Hierin bedeuten $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ zwei beliebige feste aufeinander senkrechte Einheitsvektoren in der Tangentialebene senkrecht zu $\mathfrak{n}$; $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ sind zwei noch zu bestimmende Vektoren. Aus (33) mit (31) und (34) ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$(\mathfrak{K}_2^{-1} \cdot \mathfrak{B} - \mathfrak{K}_1^{-1}) \cdot \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{n}\,\{[(\mathfrak{K}_2^{-1} \cdot \mathfrak{B} - \mathfrak{K}_1^{-1}) \cdot \mathfrak{v}_1] \cdot \mathfrak{n}\}. \tag{37}$$

Aus (37) erkennt man, daß $\mathfrak{K}_2^{-1} \cdot \mathfrak{B} - \mathfrak{K}_1^{-1}$ ein linearer Affinor ist, der in der Form

$$\mathfrak{K}_2^{-1} \cdot \mathfrak{B} - \mathfrak{K}_1^{-1} = (\mathfrak{n}, \mathfrak{p}) \tag{38}$$

geschrieben werden kann. Hierin ist $\mathfrak{p}$ ein noch zu bestimmender Vektor. Aus (36) und (38) mit $\mathfrak{E} = (\mathfrak{s}, \mathfrak{s}) + (\mathfrak{t}, \mathfrak{t}) + (\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ folgt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{K}_2 \cdot (\mathfrak{n}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{L} = (\mathfrak{s}, \mathfrak{s} - \mathfrak{q}) + (\mathfrak{t}, \mathfrak{t} - \mathfrak{r}) + (\mathfrak{n}, \mathfrak{n})\,, \tag{39}$$

[1] Vgl. z. B. *J. Kozeny*, a. a. O. S. 433.
[2] Vgl. z. B. *Lagally*, Vektorrechnung, S. 48, 2. Aufl. Leipzig 1934.

worin

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{K}_2 \cdot \mathfrak{K}_1^{-1} \tag{40}$$

bedeutet.

Wenn man alle vorkommenden Affinoren im Dreibein $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ darstellt (Indizes 1, 2, 3) so kann man (39) dazu benutzen, die Komponenten von $\mathfrak{B}$ zu ermitteln. Zu diesem Zweck schreibt man (39) in Matrizenform an und vergleicht gliedweise. Dann erhält man aus der dritten Zeile die Komponenten von $\mathfrak{p}$. Damit ergeben sich die Komponenten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ und schließlich der Affinor $\mathfrak{B}$ in der Form

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} l_{11} - \frac{k_{13}^{(2)}}{k_{33}^{(2)}} l_{31} & l_{12} - \frac{k_{13}^{(2)}}{k_{33}^{(2)}} l_{32} & l_{13} + \frac{k_{13}^{(2)}}{k_{33}^{(2)}} (1 - l_{33}) \\ l_{21} - \frac{k_{23}^{(2)}}{k_{33}^{(2)}} l_{31} & l_{22} - \frac{k_{23}^{(2)}}{k_{33}^{(2)}} l_{32} & l_{23} + \frac{k_{23}^{(2)}}{k_{33}^{(2)}} (1 - l_{33}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Hierin bedeuten die $k_{ij}^{(2)}$ bzw. l_{ij} die Komponenten von $\mathfrak{K}_2$ bzw. $\mathfrak{L}$ im Dreibein $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$. Damit ist das allgemeine Brechungsgesetz gefunden. Aus (31) und (34) kann man auch den Zusammenhang zwischen ∇h_1 und ∇h_2 ermitteln. Es ergibt sich

$$\nabla h_2 = (\mathfrak{K}_2^{-1} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{K}_1) \cdot \nabla h_1 . \tag{42}$$

Im Falle der Isotropie beider Festkörper gilt

$$\mathfrak{K}_1 = k_1 \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_2 = k_2 \mathfrak{E} . \tag{43}$$

Man erhält dann durch Spezialisierung von (40)

$$\mathfrak{L} = \frac{k_2}{k_1} \mathfrak{E} \tag{40a}$$

und nach (41)

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \frac{k_2}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{41a}$$

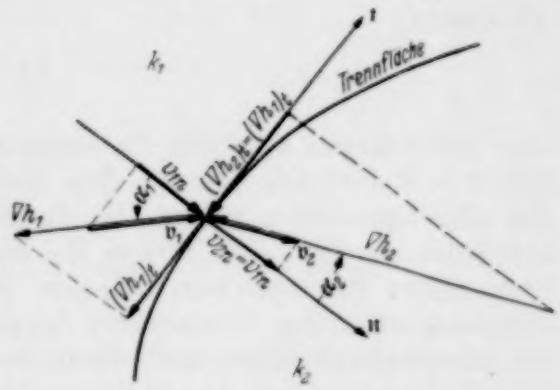

Abb. 5. Die Brechung der Stromlinien an einer Unstetigkeitsfläche (beiderseits isotroper Boden, $k_1 > k_2$).

Legt man den Vektor $\mathfrak{t}$ in die durch $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{n}$ aufgespannte Ebene, so erhält man aus (34) und (41a)

$$v_{2s} = 0 , \qquad v_{2t} = \frac{k_2}{k_1} v_{1t} , \qquad v_{2n} = v_{1n} . \tag{44}$$

Der Vektor $\mathfrak{v}_2$ liegt demnach ebenfalls in der durch $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{n}$ aufgespannten Ebene (Einfallsebene). Sind α_1 und α_2 die Winkel von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ gegen $\mathfrak{n}$, so erhält das Brechungsgesetz der Stromlinien für den Fall der Isotropie beider Festkörper die Form

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_1}{k_2} . \tag{45}$$

Bezeichnet man mit $\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial n}$ die Komponenten von ∇h im Dreibein $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, so erhält man analog die Beziehungen

$$\frac{\partial h_2}{\partial s} = 0 , \qquad \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial h_1}{\partial t} , \qquad \frac{\partial h_2}{\partial n} = \frac{k_1}{k_2} \frac{\partial h_1}{\partial n} , \tag{46}$$

was ebenfalls auf das Brechungsgesetz (45) führt (Abb. 5).

Ein Sonderfall liegt vor, wenn der durchströmte Festkörper an einen festkörperfreien Flüssigkeitsbereich mit hydrostatischer Druckverteilung grenzt (Randbedingungen 2). Diesen Fall könnte man durch Spezialisierung von (42) gewinnen; es ist jedoch einfacher, ihn direkt zu untersuchen. Da bei hydrostatischer Druckverteilung die Standrohrspiegelhöhe in dem betreffenden Flüssigkeitsbereich konstant ist ($h_1 = \text{konst.}$, $\nabla h_1 = 0$), ist wegen der Stetigkeit von h die Projektion von ∇h_2 auf die Tangentialebene der Grenzfläche überall Null. Es ist

daher ∇h_2 überall senkrecht auf die Grenzfläche gerichtet. Die Richtung der Stromlinie ergibt sich dann aus der Beziehung (31):

$$\mathfrak{v}_2 = -\mathfrak{K}_2 \cdot \nabla h_2 .$$

Man erkennt, daß im Fall eines isotropen Festkörpers auch die Stromlinien senkrecht auf die Grenzfläche stehen.

6. Die Korn-zu-Korn-Kräfte. Um einen Zusammenhang zwischen dem Spannungsaffinor $\mathfrak{S}_K$ der Korn-zu-Korn-Kräfte und der Geschwindigkeitsverteilung bzw. der Standrohrspiegelhöhe herzustellen, gehen wir von (3) aus. Bei Verwendung von (11) erhält man die Beziehung

$$\nabla \cdot \mathfrak{S}_K = \frac{(\gamma_K - \gamma_w)(1-n)}{g} \nabla U + \gamma_w \nabla h . \tag{47}$$

Drückt man in (47) die Größe ∇h nach (12) durch $\mathfrak{v}$ aus, dann erhält man

$$\nabla \cdot \mathfrak{S}_K = \frac{(\gamma_K - \gamma_w)(1-n)}{g} \nabla U - \gamma_w \mathfrak{K}^{-1} \cdot \mathfrak{v} . \tag{48}$$

$\nabla \cdot \mathfrak{S}_K$ bedeutet die auf die Volumeinheit des Gemisches bezogene Resultante der auf den Festkörper wirkenden Korn-zu-Korn-Kräfte. Man erkennt dies sofort aus der Definitionsgleichung:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S}_K = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \mathfrak{S}_K \cdot d\mathfrak{o}}{V} .$$

Aus (48) erkennt man den Zusammenhang zwischen $\nabla \cdot \mathfrak{S}_K$ und der Filtergeschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Für $\mathfrak{v} = 0$ wird nur dem um den Auftrieb der Körner verminderten Gewicht des Festkörpers das Gleichgewicht gehalten. Da durch (47) oder (48) nur die Divergenz des Spannungsaffinors bestimmt ist, läßt sich daraus $\mathfrak{S}_K$ nicht eindeutig bestimmen. Es liegt hier ein statisch unbestimmtes Problem vor, das erst gelöst werden kann, wenn ein Zusammenhang mit den Deformationen des Festkörpers hergestellt wird. Da dieser Zusammenhang wesentlich von der physikalischen Beschaffenheit des Festkörpers bzw. des Gemisches abhängt, wird er für jede Bodenart eigens ermittelt werden müssen. Wir wollen hier auf dieses Problem, das zur Beurteilung der Rutschungsgefahr von großer Bedeutung ist, nicht näher eingehen. Es wäre eine Aufgabe der Bodenmechanik, hierüber allgemeinere Untersuchungen anzustellen.

Eine Integration der hier für die Grundwasserbewegung abgeleiteten Differentialgleichungen wird auf rein analytischem Wege nur in einfachen Fällen mit tragbarem Rechenaufwand möglich sein. Hingegen bietet die Relaxationsmethode die Möglichkeit, auch komplizierte Fälle (z. B. mit graphisch vorgegebenen, analytisch schwer zu formulierenden Rändern und instationärer Strömung) zu behandeln.

In einer nachfolgenden Arbeit soll auf diese Lösungsmethode an Hand von praktischen Beispielen näher eingegangen werden.

7. Zusammenfassung. Nach einer eingehenden Analyse der wirkenden Kräfte wurden die Gleichungen für die Grundwasserströmung und die Korn-zu-Korn-Kräfte in verallgemeinerter Form abgeleitet. Anschließend wurden die möglichen Randbedingungen formuliert und die Bewegung des Grundwasserspiegels bei instationären Strömungszuständen rechnerisch verfolgt. In einer nachfolgenden Arbeit soll die Anwendung der entwickelten Gleichungen für die Lösung praktischer Aufgaben gezeigt werden.

(Eingegangen am 11. März 1954).

Anschrift der Verfasser: Prof. Dr. *G. Heinrich* und Dr. *K. Desoyer*, Wien IV., Karlsplatz 13, Technische Hochschule.

Über die Dimensionierung dünner Kreisplatten unter exzentrisch aufgebrachten Einzellasten*.

Von **Kh. Nasitta.**

1. Einleitung. Es soll das Problem der durch eine Einzellast exzentrisch belasteten und am Rand frei aufgelagerten Kreisplatte behandelt werden. Das Ziel der Arbeit ist, die von *E. Reißner* [1] 1935 abgeleitete Lösung dieses Problems durch eine einfache Näherungslösung zu ersetzen von der aus die schnelle und hinreichend genaue Dimensionierung einer exzentrisch durch Einzellast belasteten und am Rande frei aufgelagerten Kreisplatte möglich ist.

2. Die Parameter in der Plattenebene. Betrachtet man diejenige linear gebrochene komplexe Funktion, die das Innere des Einheitskreises einer ω-Ebene auf die rechte Halbebene einer z-Ebene abbildet, so werden die in der ω-Ebene konzentrischen Kreise $r = \text{konst.}$ und $0 \leqq r \leqq 1$ in eine um $x = b$ exzentrische Kreisschar in die z-Ebene überführt (Abb. 1). Die

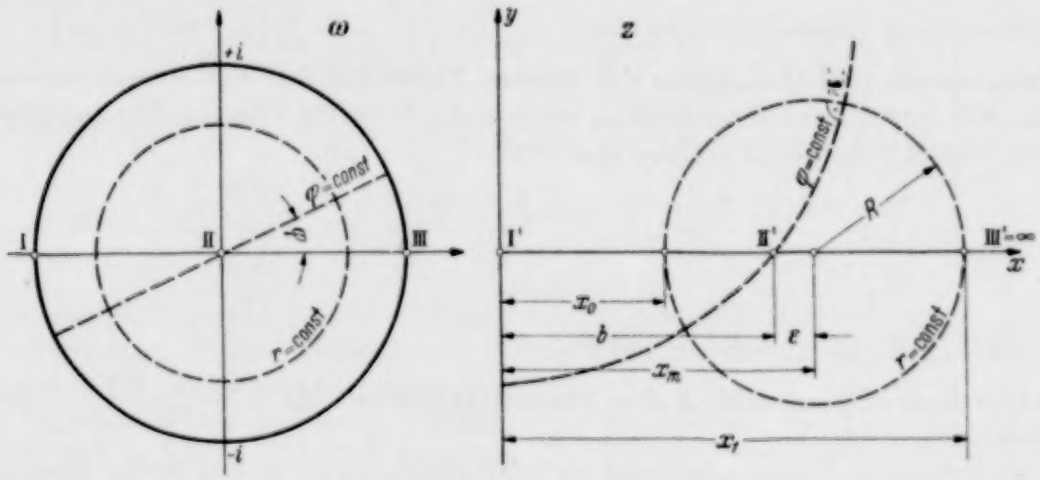

Abb. 1. Konforme Abbildung.

Linien $\varphi = \text{konst.}$ bilden ebenso wie in der ω-Ebene auch in der z-Ebene die Orthogonaltrajektorien zur ersten Schar, weil jede linear gebrochene Abbildung konform ist. Bringt man die Punkte *I*, *II*, *III* aus der ersten Ebene nach *I'*, *II'*, *III'* $= \infty$ der zweiten Ebene, so ist damit die Abbildung eindeutig gegeben, und man erhält

$$\omega = \frac{z - b}{z + b} \quad \text{oder} \quad z = -\, b\, \frac{\omega + 1}{\omega - 1}. \tag{1}$$

Mit $\omega = r\, e^{i\varphi}$ und $z = x + i\, y$ entsteht hieraus die Parameterdarstellung

$$x = b\, \frac{1 - r^2}{B}, \quad y = b\, \frac{2\, r \sin \varphi}{B}, \tag{2}$$

wobei

$$B \equiv 1 + r^2 - 2\, r \cos \varphi$$

sein soll.

Weiterhin werden wir mit der reellen Darstellung (2) in einer reellen (x, y)-Ebene arbeiten, die zugleich die Plattenebene sein soll; der Parameter $r = r_0 < 1$ soll ein für allemal den Plattenrand beschreiben, während $r = 0$ der ausgezeichnete Punkt des benützten Systems ist, in dem die singulären Beanspruchungen der Platte aufgebracht werden. Um einfachere Verständlichkeit zu ermöglichen, mögen die hier benutzten Parameter als „exzentrosymmetrische Koordinaten" bezeichnet sein.

---

* Gekürzte Fassung einer von der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg genehmigten Dissertation. Der Verfasser ist den beiden Berichtern, Herrn Professor Dr.-Ing. *I. Szabó* und Herrn Professor Dr. phil. *E. Mohr* sehr zu Dank verpflichtet.

[1] *E. Reißner*, Math. Ann. 111 (1935) S. 777; diese Lösung des Problems ist in Abschnitt **10** durch Formel (38) wiedergegeben.

Damit im nächsten Abschnitt die Querkräfte und Schnittmomente der Platte für das vorliegende spezielle System berechnet werden können, muß jetzt der gesamte Parameterraum, in den die Platte eingebettet wird, betrachtet werden. Die Mittelfläche der Platte liegt vor der Beanspruchung in der (x, y)-Ebene, die durch exzentrosymmetrische Koordinaten beschrieben wird (Abb. 2). Nach Aufbringen der Last entsteht in w-Richtung eine Durchbiegung $w(r, \varphi)$. Danach ist die Durchbiegungsfläche durch folgenden Ortsvektor gegeben:

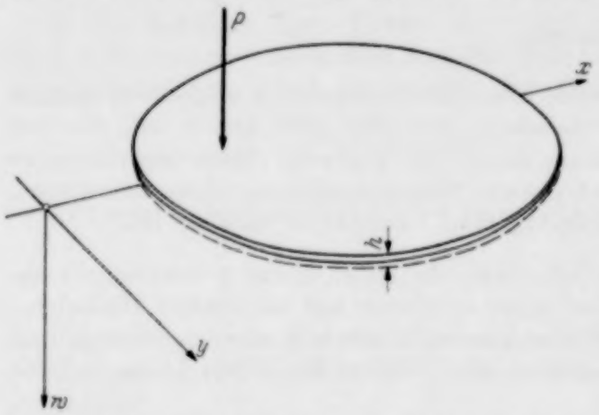

Abb. 2. Lage der Platte und der Einzellast im (x, y, w)-Raum.

$$\underset{\sim}{\mathfrak{x}}(r, \varphi) = \{x(r, \varphi)\,,\ y(r, \varphi)\,,\ w(r, \varphi)\}\,, \tag{3}$$

wo x und y durch (2) bestimmt sind. Führt man die Abkürzungen

$$U = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{2\,b}{B}\right)^2$$

$$\text{und} \qquad V = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = U\,r^2 \tag{4}$$

ein, so sind die Koeffizienten der ersten Grundform der krummen Fläche [1]

$$E = (\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_r\,\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_r) = U + w_r^2\,, \quad F = (\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_r\,\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_\varphi) = w_r\,w_\varphi\,;$$
$$G = (\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_\varphi\,\underset{\sim}{\mathfrak{x}}_\varphi) = V + w_\varphi^2\,. \tag{5a}$$

3. Schnittmomente und Querkräfte der dünnen Platte für den Fall exzentrosymmetrischer Koordinaten. Für kartesische Koordinaten werden die Schnittgrößen in Abhängigkeit von der Durchbiegung durch folgende Formeln gegeben [2]:

$$\left.\begin{aligned} M_{(x)} &= -K\,(w_{xx} + \nu\,w_{yy})\,, \quad Q_{(x)} = -K\,\frac{\partial\,\Delta w}{\partial x}\,, \\ M_{(y)} &= -K\,(w_{yy} + \nu\,w_{xx})\,, \quad Q_{(y)} = -K\,\frac{\partial\,\Delta w}{\partial y}\,, \\ M_{(xy)} &= -K\,(1-\nu)\,w_{xy}\,, \end{aligned}\right| \tag{6}$$

wobei ν die Querkontraktionszahl, E den Elastizitätsmodul und $K = \dfrac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ die Plattensteifigkeit bedeuten.

Da bei einer dünnen Platte sämtliche Schnittgrößen längs orthogonaler Parameterlinien allein durch die geometrische Gestalt dieser auf der Durchbiegungsfläche verlaufenden Kurven geliefert werden, liegt es nahe zu versuchen, die vom Parametersystem abhängigen Schnittmomente und Querkräfte durch absolute Invarianten der Parameterlinien darzustellen. Beachtet man, daß die Theorie der dünnen Platte nur für solche Durchbiegungsflächen gilt, deren Tangentialebenen kleine Winkel mit der (x, y)-Ebene einschließen, so lassen sich in der Tat die unter (6) gegebenen Ausdrücke im eben erwähnten Sinne invariant formulieren.

Nach der soeben ausgesprochenen Voraussetzung für die Durchbiegungsfläche hat offenbar die Normale $\mathfrak{n}$ der Durchbiegungsfläche dem Betrage nach kleine Komponenten in der (x, y)-Ebene. Damit ist das Quadrat des Betrages von $\mathfrak{n}$ im wesentlichen durch $n_{(w)}^2$ gegeben, so daß für den Fall der dünnen Platte $n_{(x)}^2$, $n_{(y)}^2$ gegenüber $n_{(w)}^2$ vernachlässigbar klein sind, also

$$\mathfrak{n}^2 = n_{(x)}^2 + n_{(y)}^2 + n_{(w)}^2 \approx n_{(w)}^2 \tag{7}$$

gilt.

Falls die Fläche der Durchbiegung einer dünnen Platte mit beliebigen orthogonalen Parametern u, v durch $\underset{\sim}{\mathfrak{x}}(u, v) = \{x(u, v)\,,\ y(u, v)\,,\ w(u, v)\}$ dargestellt wird, so errechnet man [3] aus der Bedingung (7)

$$\left.\begin{aligned} (x_u^2 + y_u^2) + w_u^2 &\approx (x_u^2 + y_u^2)\,, \\ (x_v^2 + y_v^2) + w_v^2 &\approx (x_v^2 + y_v^2)\,. \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Wenn E, G die Koeffizienten der ersten Grundform der Durchbiegungsfläche sind, L, M, N diejenigen der zweiten Grundform [4] so gestatten die unter (6) gegebenen Kräfte und Momente

[1] Vgl. *B. Baule*, Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. VII. Differentialgeometrie, S. 34 ff., 2. Aufl. Leipzig 1945.

[2] Vgl. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. I, S. 486 ff, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[3] Vgl. *B. Baule*, a. a. O. S. 39 u. 52.

[4] Vgl. *B. Baule*, a. a. O. S. 39 u. 52.

bei Berücksichtigung der in (8) formulierten Vernachlässigungen folgende invariante Darstellung, wobei x durch u und y durch v ersetzt sind:

$$\left.\begin{aligned} M_{(u)} &= -K\left(\frac{L}{E}+\nu\frac{N}{G}\right), \quad Q_{(u)} = -K\frac{\partial \Delta w}{\partial s_u}, \\ M_{(v)} &= -K\left(\frac{N}{G}+\nu\frac{L}{E}\right), \quad Q_{(v)} = -K\frac{\partial \Delta w}{\partial s_v}, \\ M_{(uv)} &= -K(1-\nu)\frac{M}{\sqrt{EG}}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hierin bedeutet ds_u das Linienelement der Linien $v = \text{konst.}$, also $ds_u = \sqrt{E}\,du$; entsprechendes gilt für ds_v, also $ds_v = \sqrt{G}\,dv$. Durch die Formeln (9) ist die Theorie der dünnen Platte durch Differentialinvarianten beliebiger orthogonaler Parameterlinien formuliert. Für exzentrosymmetrische Parameter erkennt man nun, daß die Beziehungen (5a) auf Grund von (8) übergehen in

$$E = U, \quad G = V, \qquad W^2 \equiv EG - F^2 = UV. \tag{5}$$

Im Falle exzentrosymmetrischer Koordinaten ergibt sich für die Koeffizienten der zweiten Grundform der durch (3) gegebenen Durchbiegungsfläche

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{(\mathfrak{x}_{rr}\,\mathfrak{x}_r\,\mathfrak{x}_\varphi)}{W} = \frac{1}{\sqrt{UV}}\left(r\,U\,w_{rr} - \frac{r}{2}\frac{\partial U}{\partial r}w_r + \frac{1}{2r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}w_\varphi\right), \\ M &= \frac{(\mathfrak{x}_{r\varphi}\,\mathfrak{x}_r\,\mathfrak{x}_\varphi)}{W} = \frac{1}{\sqrt{UV}}\left(r\,U\,w_{r\varphi} - \frac{r}{2}\frac{\partial U}{\partial \varphi}w_r - \frac{1}{2r}\frac{\partial V}{\partial r}w_\varphi\right), \\ N &= \frac{(\mathfrak{x}_{\varphi\varphi}\,\mathfrak{x}_r\,\mathfrak{x}_\varphi)}{W} = \frac{1}{\sqrt{UV}}\left(r\,U\,w_{\varphi\varphi} + \frac{r}{2}\frac{\partial V}{\partial r}w_r - \frac{1}{2r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}w_\varphi\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Um auch die Querkräfte nach (9) im vorliegenden System zu kennen, verbleibt noch die Aufgabe, den invarianten Differentialoperator Δ in exzentrosymmetrischen Koordinaten anzugeben. Die durch (1) gelieferte analytische Abbildung läßt als solche Potentiallinien invariant; d. h., wenn in der w-Ebene (Abb. 1) für eine Funktion $\Delta F = 0$ gilt, so behält diese Beziehung auch in der z-Ebene ihre Gültigkeit, woraus folgt, daß sich der Δ-Operator in exzentrosymmetrischen Koordinaten von dem in Polarkoordinaten nur durch einen Faktor unterscheiden kann. Da sich der Maßtensor der Polarkoordinaten von dem der exzentrosymmetrischen Koordinaten nur durch den in (4) definierten Faktor U unterscheidet, gilt [1]:

$$\Delta w(r,\varphi) = \frac{1}{U}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right). \tag{11}$$

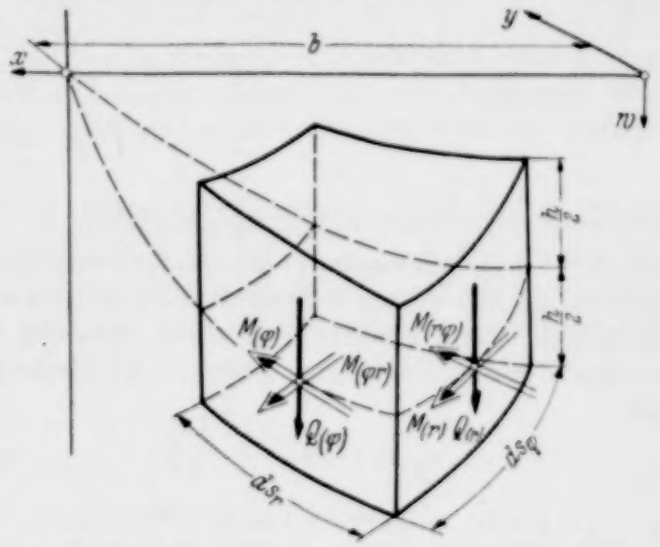

Abb. 3. Volumenelement der Platte mit Schnittkräften.

Damit sind durch (9), wenn man hierin $u = r$ und $v = \varphi$ setzt, unter Zuhilfenahme von (10) und (11) sowie mit (5) alle Querkräfte und Schnittmomente in exzentrosymmetrischen Koordinaten gegeben (Abb. 3).

4. Die Lösungen der homogenen Plattengleichung $\Delta\Delta w = 0$ für exzentrosymmetrische Koordinaten. Die Durchbiegung w einer durch Einzellast belasteten dünnen Platte muß bekanntlich der homogenen Differentialgleichung $\Delta\Delta w = 0$ genügen. Wie man weiß [2], lassen sich alle Lösungen der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ für den Fall zwei freier Ränder des Problems in Polarkoordinaten ϱ, ψ darstellen durch

$$F(\varrho,\psi) = c_1\,\varrho^2 f_1(\varrho,\psi) + c_2\,\varrho\cos\psi\cdot f_2(\varrho,\psi) + c_3\cdot f_3(\varrho,\psi). \tag{12a}$$

[1] Vgl. *M. Lagally*, Vorlesungen über Vektorrechnung, S. 325. Leipzig 1945.
[2] Vgl. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, a. a. O. S. 134 ff.

Hierin bedeuten die $f_i (i = 1, 2, 3)$ Potentialfunktionen — es gilt also $\Delta f_i = 0$ —, und die c_i sind beliebige konstante Faktoren. Da es sich bei $\Delta\Delta$ um einen invarianten Differentialoperator handelt, muß der eben ausgesprochene Satz gültig bleiben, wenn einerseits $\Delta\Delta$ und andererseits $F(\varrho, \psi)$ auf exzentrosymmetrische Koordinaten umgeschrieben werden. Wir denken uns also im folgenden $\Delta\Delta$ für exzentrosymmetrische Koordinaten formuliert und befassen uns damit, $F(\varrho, \psi)$ auf $G(r, \varphi)$ umzuschreiben. Bei Verwendung der Formeln (2) erhält man aus ϱ^2 und $\varrho \cos\psi$

$$x^2 + y^2 = \frac{b^2}{B}(1 + r^2 + 2\,r\cos\varphi) \qquad \text{und} \qquad x = \frac{b}{B}(1 - r^2)\,.$$

Wenn man die Funktionen f_i in neue Potentialfunktionen $\bar{g}_i(r, \varphi)$ übergehen läßt, so entsteht nun aus (12a)

$$G(r,\varphi) = \frac{1}{B}[r^2\,(c_1\,b^2\,\bar{g}_1 - c_2\,b\,\bar{g}_2 + c_3\,\bar{g}_3) + r\cos\varphi\,(2\,c_1\,b^2\,\bar{g}_1 - 2\,c_3\,\bar{g}_3) + (c_1\,b^2\,\bar{g}_1 + c_2\,b\,\bar{g}_2 + c_3\,\bar{g}_3)]\,. \tag{12b}$$

Faßt man die Klammern in diesem Ausdruck zu neuen Potentialfunktionen $C_i\,g_i$ zusammen, so ist gezeigt: Alle Lösungen von $\Delta\Delta G(r, \varphi) = 0$ in exzentrosymmetrischen Koordinaten lassen sich mit beliebigen C_i und $\Delta g_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ in der Form darstellen

$$G(r,\varphi) = \frac{1}{B}[C_1\,r^2 \cdot g_1(r,\varphi) + C_2\,r\cos\varphi \cdot g_2(r,\varphi) + C_3 \cdot g_3(r,\varphi)]\,. \tag{12}$$

Mit Hilfe dieser grundlegenden Aussage, über die im exzentrosymmetrischen System zur Verfügung stehenden Lösungen der Bipotentialgleichung, ist nun eine vollkommene Übersicht über die einfachsten Lösungsanteile gegeben.

Zur Konstruktion dieser Lösungen ist festzustellen, daß wegen (11) im Falle exzentrosymmetrischer Koordinaten dieselben Potentialfunktionen wie im Falle der Polarkoordinaten verwendet werden können. Geht man nun von dem Gesichtspunkt aus, nur die einfachsten elementaren Potentialfunktionen heranzuziehen, so wird man folgende Lösungen von $\Delta g_i = 0$ ansetzen können:

$$g_0 = 1\,, \tag{13}$$

$$g_1 = \ln r\,, \tag{14}$$

$$g_2 = r\cos\varphi\,, \tag{15}$$

$$g_3 = \frac{1}{r}\cos\varphi\,. \tag{16}$$

Durch Kombination der Funktionen (13) bis (16) mit den Koeffizienten $\frac{r^2}{B}$, $\frac{1}{B}\,r\cos\varphi$ und $\frac{1}{B}$ aus (12) erhält man zehn voneinander verschiedene Partikularlösungen der homogenen Plattengleichung. Mit diesen bekommt man mit beliebigen c_i, wenn man berücksichtigt, daß nach den Grundlagen der Theorie w und die Neigung der Tangentialebene für alle den Plattenbereich beschreibenden Parameter beschränkt bleiben müssen und weiter w am Rande verschwinden soll,

$$w(r,\varphi) = \frac{1}{B}\left[c_1\,r^2\ln\frac{r}{r_0} + c_2\,(r_0^2 - r^2) + c_3\,r\,(r_0^2 - r^2)\cos\varphi + c_4\,(r_0^2 - r^2)\cos^2\varphi\right]. \tag{17}$$

Mit (17) ist die einfachste Lösung der homogenen Plattengleichung hergestellt, die geeignet ist, die Durchbiegung einer am Rande aufgelagerten dünnen Platte zu beschreiben.

5. Singularität der Lösung. Die Lösung (17) der homogenen Bipotentialgleichung soll nun benutzt werden, um für das vorliegende Problem eine einfachste Näherungslösung zu konstruieren, derart, daß für kleiner werdende Exzentrizität ε (Abb. 1) die Näherungslösung immer besser wird und schließlich für den konzentrischen Fall $\varepsilon = 0$ mit der bekannten, symmetrischen Lösung zusammenfällt; diese Tendenz der Näherung ist die für die Bemessung erwünschte.

Für $r = 0$ erhält man aus der Grundlösung (17)

$$w(0,\varphi) = r_0^2\,(c_2 + c_4\cos^2\varphi)\,; \tag{18}$$

d. h. es liegt in $r = 0$ eine unendliche Vieldeutigkeit vor. Hieraus erhellt, daß, wenn $c_4 \neq 0$ (17) nicht ohne weiteres zur Beschreibung einer Durchbiegungsfläche benutzt werden kann. Es liegt jedoch nahe, die Stelle der wesentlichen Singularität in $r = 0$ vorerst aus der Platte herausgeschnitten zu denken, indem ein beliebig kleiner Kreis mit von Null verschiedenem Halb-

messer r_ε als innerer Rand der Platte eingeführt wird. Wir werden nun die Grundlösung (17) den äußeren Randbedingungen der freien Auflagerung [1] am Rande $r = r_0$ anpassen, und dann wird es durch Interpretation der am inneren Rande entstehenden Kraft- und Momentenverteilungen und anschließender Superposition möglich sein, die störenden Kräfte und Momente am inneren Rande der Platte in erster Näherung zu beseitigen und die für den Lastfall der Einzellast geforderte Beanspruchung allein zurückzubehalten.

6. Äußere Randbedingungen. Die im Falle einer freien Auflagerung zu befriedigenden Randbedingungen lauten $\{w\}_{r=r_0} = 0$ und $\{M_{(r)}\}_{r=r_0} = 0$. Wegen der ersten Auflagerbedingung ist $w_\varphi = w_{\varphi\varphi} = 0$ am äußeren Rande, und damit wird nach (9), (10) und (5) die zweite der Auflagerbedingungen

$$\{M_{(r)}\}_{r=r_0} = -K\left\{\left[\frac{1}{U}\left(w_{rr} - \frac{1}{2U}\frac{\partial U}{\partial r}w_r\right) + \nu\frac{1}{2UV}\frac{\partial V}{\partial r}w_r\right]\right|_{r=r_0} = 0\,. \tag{19}$$

Da für die Lösung (17) $\{w\}_{r=r_0} = 0$ gilt, muß diese nur noch der Randbedingung (19) angepaßt werden. Setzt man (17) in (19) ein, so entsteht

$$\begin{aligned}&4\,r_0\,c_1 - 4\,r_0^2\,c_1\cos\varphi - 4\,r_0(1-r_0^2)\,c_2 - 8\,r_0^2\,c_3\cos\varphi + 8\,r_0^3\,c_3\cos^2\varphi - 4\,r_0\,c_4(1-r_0^2)\cos^2\varphi\\ &\quad - (1-r_0^2)(1-\nu)(r_0\,c_1 - 2\,r_0\,c_2 - 2\,r_0^2\,c_3\cos\varphi - 2\,r_0\,c_4\cos^2\varphi) = 0\,.\end{aligned} \tag{20a}$$

Da (20a) für alle φ gelten soll, müssen die Koeffizienten von 1, $\cos\varphi$ und $\cos^2\varphi$ identisch verschwinden. Daraus fließen drei Gleichungen zur Bestimmung der c_i; mit

$$\alpha = 4 - (1-\nu)(1-r_0^2)\,, \qquad \beta = (1-r_0^2)(1+\nu) \tag{21}$$

erhält man

$$\left.\begin{aligned}\alpha\,c_1 - 2\,\beta\,c_2 &= 0\,,\\ 2\,c_1 + \alpha\,c_3 &= 0\,,\\ 4\,r_0^2\,c_3 - \beta\,c_4 &= 0\,.\end{aligned}\right| \tag{20b}$$

Eine Konstante ist noch frei verfügbar; wählt man c_1, als vorerst noch beliebig, so folgt aus (20b)

$$c_2 = \frac{\alpha}{2\beta}c_1\,, \qquad c_3 = -\frac{2}{\alpha}c_1\,, \qquad c_4 = -\frac{8\,r_0^2}{\alpha\,\beta}c_1\,. \tag{20}$$

Mit den unter (20) gegebenen Konstanten c_i wird fernerhin weitergerechnet, und ohne besonderen Zusatz sind stets die c_i der freien Auflagerung gemeint. Damit ist den Auflagerbedingungen des hier behandelten Problems exakt genügt, und wir wenden uns nun den Lastverhältnissen zu.

7. Kräfte und Momente am inneren Rand. Voraussetzungsgemäß ist die Platte frei von Flächenlasten, aber es befinden sich Lasten in Form von Querkräften und Momenten am inneren Rand r_ε der Platte. Um die Deutung und Vergleichbarkeit dieser Querkräfte und Momente zu erleichtern, leiten wir aus den nach (9) gegebenen Schnittgrößen der Dimension nach wahre Kräfte und Momente folgendermaßen ab:

$$\left.\begin{aligned}dM_{(r)} &= M_{(r)}\,ds_\varphi = m_{(r)}\,d\varphi\,,\\ dM_{(r\varphi)} &= M_{(r\varphi)}\,ds_\varphi = m_{(r\varphi)}\,d\varphi\,,\\ dK_{(r)} &= Q_{(r)}\,ds_\varphi = k_{(r)}\,d\varphi\,.\end{aligned}\right| \tag{22}$$

Hieraus erhält man unter Beachtung von (4) und (5)

$$m_{(r)} = \frac{2\,b\,r}{B}M_{(r)}\,, \qquad m_{(r,\varphi)} = \frac{2\,b\,r}{B}M_{(r,\varphi)}\,, \qquad k_{(r)} = \frac{2\,b\,r}{B}Q_{(r)}\,.$$

Mit Benutzung der Plattenlösung (17) errechnet man mit (9), (10), (11) und (5) die folgenden Momente und Kräfte, wobei sofort die Glieder, die mit $r_\varepsilon \to 0$ nach Null gehen, also die Potenzen erster und höherer Ordnung von r, wegen der beliebigen Kleinheit von r_ε weggelassen

[1] Es sei darauf hingewiesen, daß für den einfachen Fall der starren Einspannung $c_4 \equiv 0$ wird, wodurch die Singularität verschwindet und man eine äußerst einfache und handliche Lösung erhält, die in bipolaren Koordinaten schon 1926 von *E. Melan* angegeben worden ist; für die hier benutzten Koordinaten wird

$$W_{eingespannt} = \frac{P\,b^2}{4\,\pi\,K}\frac{1}{B}\left[2\,r^2\ln\frac{r}{r_0} + (r_0^2 - r^2)\right].$$

werden:

$$\left.\begin{aligned} m_{(r)} &= K\frac{c_4 r_0^2 \nu}{b}\frac{\cos 2\varphi}{r_\varepsilon} - K\frac{2 c_4 r_0^2 (1+\nu)}{b}\cos\varphi \sin^2\varphi , \\ m_{(r\varphi)} &= -K\frac{c_4 r_0^2 (1-\nu)}{2b}\frac{\sin 2\varphi}{r_\varepsilon} , \\ k_{(r)} &= -\frac{K}{b^2}\left(c_1 + c_4 r_0^2\frac{\cos 2\varphi}{r_\varepsilon^2} - c_4 r_0^2\frac{\cos\varphi}{r_\varepsilon}\right). \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

Für eine Abschätzung der Wirkungen ist es nun zweckmäßig, Kräfte und Momente verschiedener Größenordnungen bezüglich r_ε zu unterscheiden. Dann erhält man

$$\left.\begin{aligned} &m_{(r)} = m_{(r)}^{(1)} + m_{(r)}^{(2)} , \; m_{(r\varphi)} = m_{(r\varphi)}^{(2)} , \qquad k_{(r)} = k_{(r)}^{(0)} + k_{(r)}^{(1)} + k_{(r)}^{(2)} , \\ &\text{mit} \\ &m_{(r)}^{(1)} = -K\frac{2 c_4 r_0^2 (1+\nu)}{b}\cos\varphi\sin^2\varphi , \qquad k_{(r)}^{(0)} = -K\frac{c_1}{b^2} , \\ &m_{(r)}^{(2)} = K\frac{c_4 r_0^2 \nu}{b}\frac{\cos 2\varphi}{r_\varepsilon} , \qquad k_{(r)}^{(1)} = K\frac{c_4 r_0^2}{b^2}\frac{\cos\varphi}{r_\varepsilon} , \\ &m_{(r\varphi)}^{(2)} = -K\frac{c_4 r_0^2 (1-\nu)}{2b}\frac{\sin 2\varphi}{r_\varepsilon} , \qquad k_{(r)}^{(2)} = -K\frac{c_4 r_0^2}{b^2}\frac{\cos 2\varphi}{r_\varepsilon^2} . \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Man erkennt nun leicht folgendes: Die konstanten Kräfte $k_{(r)}^{(0)}$ am inneren Rand r_ε bilden zusammen eine resultierende Kraft, deren Größe und Richtungssinn durch die noch freie Konstante c_1 festgelegt werden kann. Diese Wirkung allein ist also die gewünschte Wirkung einer Einzellast; denn es ist von vornherein klar und läßt sich auch im konzentrischen Fall leicht nachweisen, daß ein Ring konstanter Querkräfte an einem beliebig kleinen Loch angreifend dieselbe Wirkung hat, wie eine Einzellast, die anstelle der Querkräfte auf einer ungelochten Platte in der Mitte des vorher vorhandenen beliebig kleinen Loches angreift und die der Größe nach gleich der Summe der Querkräfte ist. Die außer $k_{(r)}^{(0)}$ angreifenden Kräfte und Momente bezeichnen wir ein für allemal als S t ö r s y s t e m e , und zwar wegen ihrer verschiedenen Größenordnungen die mit dem oberen Index (1) als Nebenstörsystem und jene mit oberen Index (2) als Hauptstörsystem. Wie aus (24) ersichtlich ist, sind die beiden Störsysteme „Gleichgewichtssysteme“ [1]. Da nach Festlegung von $k_{(r)}^{(0)}$ keine Konstante in der Lösung (17) mehr verfügbar ist, können die Störungen nur noch durch Überlagerung zu Null gemacht werden. Das Störsystem (1) kann wegen r_ε beliebig klein zu einem endlichen singulären Moment in $r = 0$ zusammengefaßt werden. Dazu macht man sich klar, daß ein singuläres Moment, wenn überhaupt, nur um die Achse $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{3}{2}\pi$ wirken kann, da die durch (17) dargestellte Durchbiegungsfläche symmetrisch um die Achse $\varphi = 0$ bzw. π verläuft. Die Kräfte $k_{(r)}^{(1)}$ liefern Momente $d\overline{M}$ bezüglich der Achse $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{3}{2}\pi$ und man erhält, wenn s_{r_ε} der wahre Halbmesser des beliebig kleinen Loches um $r = 0$ mit dem Parameterwert r_ε ist,

$$d\overline{M} = k_{(r)}^{(1)} s_{r_\varepsilon}\cos\varphi\, d\varphi . \tag{25a}$$

Beachtet man nun, daß $s_{r_\varepsilon} = \int_0^{r_\varepsilon} ds_r = \int_0^{r_\varepsilon}\sqrt{U}\, dr$ ist und wegen (4) und (2) $\sqrt{U}$ in der Umgebung von Null näherungsweise $2b$ ist, so erhält man aus (25a) durch Integration von $\varphi = 0$ bis 2π für das resultierende Moment des „Gleichgewichtssystems“ von Kräften $k_{(r)}^{(1)}$,

$$\overline{M} = \frac{K c_4 r_0^2 2\pi}{b} . \tag{25}$$

In gleicher Weise wirken die Momente $m_{(r)}^{(1)}$ aus (24), deren Resultierende in Richtung $\varphi = 0$ bzw. π Null ist, und in Richtung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{3}{2}\pi$ ergibt sich durch Integration

$$\overline{M} = -\frac{K c_4 r_0^2 \pi}{2b}(1+\nu) .$$

[1] In der vorliegenden Arbeit sind von der üblichen Bedeutung des Wortes „Gleichgewichtssystem“ abweichend solche Systems von Kräften oder Momenten gemeint, deren Resultierende bzw. deren Integralmittelwert über φ Null ist.

Mithin ist das singuläre Moment in $r = 0$, als das sich das Nebenstörsystem $S^{(1)} = \{k_{(r)}^{(1)}, m_{(r)}^{(1)}\}$ in seiner Wirkung deuten läßt, gegeben durch $M^{(1)} = \overline{M} + \overline{\overline{M}}$, und man erhält

$$M^{(1)} = \frac{K c_4 r_0^2 \pi}{2 b} (3 - \nu) . \tag{27}$$

Die Größe der Nebenstörung kann nun bei jedem Zahlenbeispiel nach (27) ermittelt werden. Man kann jedoch sagen, daß die Wirkung des Störsystems $S^{(1)}$ sehr klein gegenüber derjenigen von $S^{(2)} = \{k_{(r)}^{(2)}, m_{(r)}^{(2)}, m_{(r\varphi)}^{(2)}\}$ sein wird.

Stellt man die Kräfte $k_{(r)}^{(2)}$ und Momente $m_{(r)}^{(2)}$, $m_{(r\varphi)}^{(2)}$ schematisch nur an ihren Maximalstellen dar, d. h. also $\varphi = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$ bzw. $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, so ergibt sich endgültig für die Gesamtheit der am inneren Rand der Platte auftretenden Kräfte und Momente das in Abb. 4 dargestellte Bild.

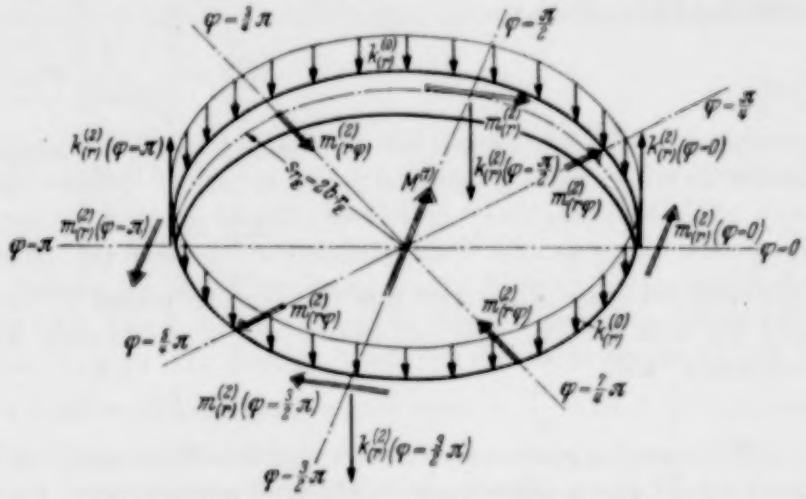

Abb. 4. Kräfte und Momente am inneren Rand der Platte.

8. Wirkung des Hauptstörsystems. Da $S^{(1)}$ als endliches Moment gedeutet werden konnte, erkennt man, daß nur das Vorhandensein von $S^{(2)}$ die unendliche Vieldeutigkeit der Lösung (17) in $r = 0$ bewirken kann, da ein endliches Moment eine solche Wirkung auf eine Platte bekanntlich nicht hat.

Um das Hauptstörsystem $S^{(2)}$ eliminieren zu können, kommt es nun im weiteren darauf an, allein seine Wirkung abzuschätzen. Zu diesem Zweck soll folgende einfache Durchbiegungsfläche, die ein ähnliches „Störsystem" und dieselbe Singularität enthält, zum Vergleich herangezogen werden:

$$w = \left[a \varrho^2 \ln \frac{\varrho}{\varrho_0} + d_0 (\varrho_0^2 - \varrho^2)\right] \cos 2\psi , \tag{28}$$

wobei ϱ, ψ zentrische Polarkoordinaten sind und $a = -\frac{P}{8\pi K}$ und $d_0 = \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} a$ sein sollen. Mit diesen Konstanten a und d_0, die weiterhin die hier definierte Bedeutung beibehalten sollen, erfüllt w aus (28) die Randbedingungen einer freien Plattenauflagerung, wenn $\varrho = \varrho_0$ den Plattenrand beschreibt. Außerdem hat w in $\varrho = 0$ die gewünschte algebraische Singularität, und da der Faktor vor $\cos 2\psi$ in (28) genau die Lösung einer frei aufgelagerten und im Mittelpunkt durch die Einzellast $-P$ belasteten Kreisplatte ist, liefert (28) für eine Schnittlinie $\psi = \text{konst.}$ eine solche Durchbiegungskurve, wie sie auf der Durchbiegungsfläche einer Platte für alle ψ entstehen würde, die allein durch die Einzellast $-P \cos 2\psi = P_S$ belastet und am Rande frei aufgelagert ist. Insbesondere haben wir auf der Linie $\psi = 0$ bzw. π eine solche Durchbiegungslinie, als ob eine scheinbare Einzellast P_S von der Größe $-P$ in $\varrho = 0$ auf die Platte wirken würde, — „scheinbare Einzellast in $\varrho = 0$" deshalb, weil wir ja wegen der Singularität von (28) wiederum wie bei (17) den Punkt $\varrho = 0$ ausschließen und uns einen beliebig kleinen Kreis mit dem Halbmesser $\varrho_\varepsilon > 0$ um $\varrho = 0$ geschlagen denken müssen. Wie bei (17) werden wir nun die am inneren Rand ϱ_ε der Platte wirklich auftretenden Kräfte und Momente berechnen. Es ergibt sich analog zu (24a)

$$\left.\begin{aligned} m_{(\varrho)} &= K \frac{4 d_0 \nu \varrho_0^2}{\varrho_\varepsilon} \cos 2\psi , \\ m_{(\varrho\,\psi)} &= -K \frac{2 d_0 (1-\nu) \varrho_0^2}{\varrho_\varepsilon} \sin 2\psi , \\ k_{(\varrho)} &= -K \frac{8 d_0 \varrho_0^2}{\varrho_\varepsilon^2} \cos 2\psi . \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Außerdem liefert (28) nicht wie das bei (17) der Fall war, $\Delta\Delta w = 0$, sondern man erhält mit $\Delta\Delta w = p/K$ für die flächenhafte Belastung, durch die die Durchbiegungsfläche nach (28)

beansprucht wird,

$$p = - K \frac{16\,a}{\varrho^2} \cos 2\,\psi\,. \tag{30}$$

Wir wollen zunächst die Belastung (30) außer acht lassen und zuerst das System (29), das wir durch S_v kennzeichnen, mit dem Hauptstörsystem $S^{(2)}$ aus (24) vergleichen. Um für beide Systeme die Lage gegenüber ϱ bzw. $r = 0$ und die Größe der Kräfte und Momente vergleichbar zu machen, gehen wir in $S^{(2)}$ aus (24) auf wahre Radien und Winkel über; wie schon bei (25a) gezeigt, erhält man für den Halbmesser des beliebig kleinen Loches in der Umgebung von Null $s_{r_e} = 2\,b\,r_e$. Wir setzen nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraus, daß $s_{r_e} = \varrho_e$ ist. Beachtet man weiter, daß in der Umgebung von $r = 0$ die Winkel φ der exzentrosymmetrischen Koordinaten wahre Winkel sind, also $\varphi = \psi$, so errechnet man unter Zuhilfenahme von (29) und (24) leicht

$$\left.\begin{aligned} m_{(r)}^{(2)} &= \left[\frac{c_4\,r_0^2}{2\,d_0\,\varrho_0^2}\right] m_{(\varrho)}\,, \\ m_{(r\,\varphi)}^{(2)} &= \left[\frac{c_4\,r_0^2}{2\,d_0\,\varrho_0^2}\right] m_{(\varrho\,\psi)}\,, \\ k_{(r)}^{(2)} &= \left[\frac{c_4\,r_0^2}{2\,d_0\,\varrho_0^2}\right] k_{(\varrho)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{31a}$$

Hieraus erkennt man, daß das Hauptstörsystem $S^{(2)}$ aus (17) dem System S_v aus (28) ähnlich ist, da sich Kräfte und Momente nur durch einen konstanten gemeinsamen Faktor unterscheiden, also

$$S^{(2)} \sim S_v\,. \tag{31}$$

Wir wenden uns nun der Wirkung der flächenhaften Belastung p in (30) zu. Diese Belastung ist über die ganze Platte als „Gleichgewichtssystem" verteilt derart, daß sie im ersten Oktanten positive Werte, in den nächsten beiden negative Werte annimmt und in den zwei darauffolgenden Oktanten wiederum positive Werte zeigt usw., wie man leicht aus (30) unter Berücksichtigung, daß a negativ ist, abliest (Abb. 5). Um die Wirkung von p bezüglich seiner Verteilung über ψ abzuschätzen, machen wir uns klar, daß wegen des viermaligen Vorzeichenwechsels der Belastung p die Wirkung nur ein Bruchteil derjenigen ist, wenn p einsinnig bezüglich ψ über die ganze Fläche verteilt wäre. Man kann eine obere Schranke für diesen Bruchteil der Wirkung angeben, wenn man sich parallel zur Linie $\psi = \frac{3}{4}\pi$ bzw. $\frac{\pi}{4}$ einen Balken aus der Platte herausgeschnitten denkt (Abb. 5). Erstens ist damit ein Schnitt geringsten Vorzeichenwechsels bezüglich der Last durch die Platte gelegt, und zweitens werden durch die Betrachtung eines Balkens zu große Durchbiegungen geliefert; beides sind also Umstände, durch die wir auf der sicheren Seite bleiben. Nun verhalten sich aber die maximalen Durchbiegungen eines Balkens, der einmal durch eine einsinnige konstante Last belastet wird und das andere Mal der Summe nach durch dieselbe konstante Last, jedoch derart, daß zu gleichen Teilen von der Mitte aus betrachtet auf der einen Seite positive und auf der anderen Seite negative Belastungen vorliegen (Abb. 5), wie 16 zu 1. Also wird die Wirkung von p höchstens 1/16 derjenigen sein, wenn p als einsinnige Last über die Plattenfläche bezüglich ψ verteilt wäre.

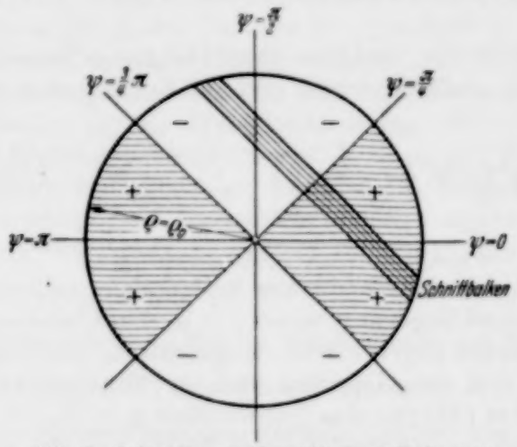

Abb. 5. Belastung zur Durchbiegungsfläche (28).

Wir befassen uns nun mit der Verteilung von p über den Radius ϱ. Dazu bilden wir aus (30) eine wahre Kraft und erhalten

$$d\mathfrak{K} = p\,dF = - 16\,K \cos 2\,\psi\,d\psi\,d(\ln \varrho)\,. \tag{30a}$$

Die Änderung der Kraft $\mathfrak{K}$ über den Radius ϱ geht also logarithmisch vor sich, woraus wir erkennen, daß in der Umgebung von $\varrho = 0$ die Wirkung von p vernachlässigbar klein gegenüber derjenigen des Systems S_v aus (29) ist. Wir können demnach für die Wirkung p über ϱ annehmen, daß diese in $\varrho = 0$ praktisch Null ist und für größer werdende ϱ anwächst, jedoch in

der Nähe des Randes bis zu Null wieder abnehmen wird, da eine Last in der Mitte einer Kreisplatte angebracht erheblich größere Wirkung, d. h. Durchbiegung, zeitigt, wie wenn dieselbe Last in der Nähe des Randes aufgebracht werden würde. Diese Umstände legen es nun nahe, die wirklich auftretende „Gleichgewichtslast" p mit einer Gewichtsfunktion g zu multiplizieren und somit eine neue „Ersatzlast" $\bar{p} = g\,p$ zu bilden; die so erzeugte Funktion $\bar{p}$ soll solche Belastungsordinaten aufweisen, wie sie in erster Näherung der tatsächlichen Wirkung von p als über den ganzen Radius der Platte gleichmäßig verteilte Last entsprechen, so daß man sich durch Integration von $\bar{p}$ über einen Quadranten unter Berücksichtigung der Wirkung von p als Gleichgewichtssystem über ψ ein Bild über die tatsächliche Wirkung von p machen kann, wenn man die durch die Integration entstehende Summe als gleichmäßig verteilte einsinnige Last aufgebracht denkt. Nach dem eben Gesagten muß $\bar{p}$ in $\varrho = 0$ verschwinden, woraus folgt, daß g wie ϱ^3 gegen Null gehen muß; wenn weiter $\bar{p}$ für $\varrho = \varrho_0$ Null sein soll, so muß g am Rande $\varrho = \varrho_0$ ebenfalls verschwinden, so daß wir für g eine Parabel vierter Ordnung ansetzen werden, von der Form

$$g = C\,\varrho^3\,(\varrho_0 - \varrho)\,. \tag{32}$$

In (32) ist C eine noch freie Konstante, mit deren Hilfe über die Größe des Maximalwertes von g zwischen $\varrho = 0$ und $\varrho = \varrho_0$ verfügt werden kann. Mit (32) ist die Verteilung der Wirkungen von p über ϱ festgelegt, und wir können nun die in (32) noch freie Konstante C dazu verwenden, die weiter oben besprochene obere Schranke der tatsächlichen Wirkung von p bezüglich ψ zu erfassen. Wir hatten festgestellt, daß wegen der Verteilung von p über ψ die tatsächliche Wirkung von p höchstens 1/16 derjenigen sein kann, wenn p über die ganze Fläche einsinnig verteilt wäre. Also werden wir das Maximum von g zu 1/16 wählen, wodurch dann g und somit auch $\bar{p}$ eindeutig festgelegt sind. Integrieren wir dann $\bar{p}$ im Quadranten von $-\frac{\pi}{4}$ bis $+\frac{\pi}{4}$ auf und denken uns die so erhaltene Summe als vierten Teil einer konstanten einsinnigen Flächenbelastung, so haben wir in erster Näherung eine obere Schranke, für die aus dem Vorhandensein der Flächenbelastung p aus (30) zu erwartenden maximalen Durchbiegungen. Mit $g_{max} = 1/16$ bestimmt man C aus (32), bildet mittels (30) $\bar{p} = g\,p$, integriert von $-\frac{\pi}{4}$ bis $+\frac{\pi}{4}$ auf und multipliziert die so erhaltene Summe mit vier: Man erhält $\frac{1}{8}\,P$; d. h. wir haben uns 1/8 der scheinbaren Einzellast $-P$, von der weiter oben gesagt wurde, daß sie auf der Linie $\psi = 0$ bzw. π in voller Höhe wirkt, auf die ganze Platte als konstante Last verteilt zu denken. Der Vergleich P einmal als Einzellast in $\varrho = 0$ angreifend und das andere Mal $P/8$ als konstante Last über die ganze Platte verteilt, liefert, daß die maximale Durchbiegung in $\varrho = 0$ von $P/8$ als konstante Last rund 5% derjenigen von P als Einzellast aufgebracht, beträgt. Damit können wir nun abschätzend feststellen, daß die Wirkung der Flächenlast p aus (28) im ungünstigsten Fall höchstens 5% derjenigen des Systems S_v, wie es durch (29) gegeben ist, betragen kann. Wir werden also die Flächenlast p vernachlässigen können und kommen zu dem Schluß, daß mit sehr guter Näherung allein das System S_v die Form der Durchbiegungsfläche (28) erzeugt.

Nun wollen wir von den Ergebnissen, die im konzentrischen Fall für S_v gefunden wurden, auf den exzentrischen Fall schließen. Wenn man sich für einen Augenblick als Beobachter auf der nach (28) gegebenen Durchbiegungsfläche befindlich denkt, außerhalb des Mittelpunktes der Platte, und sich auf der Platte bewegt, so erkennt man, daß eine reine Entfernungsänderung vom Mittelpunkt die Größe der in $\varrho = 0$ scheinbar wirkenden Einzellast P_S nicht ändert, da man bei einer reinen Entfernungsänderung auf einer Linie $\psi =$ konst. voranschreitet, und $P_S = -\,P\cos 2\,\psi$ vom Winkel, nicht aber vom Radius abhängt. Wenn sich jedoch vom Beobachter aus gesehen eine Drehung des Mittelpunktes vollzieht, d. h. wenn man sich quer zu den Linien $\psi =$ konst. bewegt, so wird sich eine Änderung der scheinbaren Einzellast P_S ergeben. Für das nun Folgende möge sich der Beobachter auf der Linie $\psi = 0$ an einem beliebigen aber festen Punkt $\varrho =$ konst. aufhalten, und statt seiner bewege sich jetzt der Punkt $\varrho = 0$, der Angriffspunkt von S_v bzw. P_S aus dem Mittelpunkt längs der Linie $\psi = \pi$ heraus. Da sich der Beobachter auf der Linie $\psi = 0$ aufhält, entspricht dieser Vorgang einer reinen Entfernungsänderung zwischen S_v und dem Beobachter. Da also eine reine Entfernungsänderung von S_v bzw. P_S vorliegt, befindet sich der Beobachter, auch wenn S_v nicht in der Mitte der Platte, sondern exzentrisch angreift, längs der ganzen Linie $\psi = 0$ bzw. π, also für alle ϱ auf einer Durchbiegungslinie, die in erster Näherung durch eine konstante scheinbare Einzel-

last P_S erzeugt gedacht werden kann. Kurz gesagt haben wir damit das Ergebnis gewonnen, daß das Kraft- und Momentensystem S_v, auch wenn es exzentrisch auf der Linie $\varphi = 0$ bzw. π angreift, wie eine scheinbare Einzellast wirkt; qualitativ gesprochen erzeugt S_v längs der Hauptdurchbiegungslinie, wie wir die Linie $\varphi = 0$ bzw. π fernerhin nennen wollen, eine Einzellastdurchbiegungskurve. Da nun aber nach (31) $S^{(2)}$ ähnlich zu S_v ist, sind auch die durch die Systeme erzeugten Durchbiegungslinien ähnlich und wir kommen zu dem Ergebnis: Das Hauptstörsystem $S^{(2)}$ aus der Plattenlösung (17) wirkt allein in erster Näherung längs der ganzen Hauptdurchbiegungslinie wie eine scheinbare Einzellast im Quellpunkt $r = 0$ angreifend; d. h. die Wirkung von $S^{(2)}$ ist entlang der Linie $\varphi = 0$ bzw. π der gewünschten durch $k^{(0)}_{(r)}$ aus (24) hervorgerufenen Punktlastwirkung ähnlich, d. h. bis auf einen konstanten Faktor gleich.

9. Elimination des Hauptstörsystems. Die zunächst erzielten Aussagen können sich also nur auf die Hauptdurchbiegungslinie beziehen. Zusammenfassend wissen wir bisher, daß die nach (17) für $\varphi = 0$ bzw. π gegebene Durchbiegungskurve qualitativ derjenigen einer in $r = 0$ angreifenden Einzellast näherungsweise entspricht; jedoch ist die Größe dieser Einzellast noch nicht bekannt, da sich die Einzellastdurchbiegungskurve aus (17) aus zwei Komponenten zusammensetzt: erstens Wirkung von $k^{(0)}_{(r)}$ und zweitens Wirkung von $S^{(2)}$, die derjenigen von $k^{(0)}_{(r)}$ auf der Hauptdurchbiegungslinie entgegengerichtet ist (Abb. 4). Wenn mit w_p allein die Wirkung von $k^{(0)}_{(r)}$ bezeichnet wird, so gilt bei Vernachlässigung der Wirkung des Nebenstörsystems $S^{(1)}$ wegen der Ähnlichkeit der Wirkungen von $k^{(0)}_{(r)}$ und $S^{(2)}$ längs der Hauptdurchbiegungslinie folgende Ähnlichkeitsrelation:

$$\frac{w_p\left(r, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right)}{w\left(r, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right)} = \frac{w_p\left(0, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right)}{w\left(0, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right)}. \qquad (33a)$$

Hieraus folgt

$$w_p\left(r, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right) = \frac{w_p\left(0, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right)}{w\left(0, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right)} w\left(r, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right). \qquad (33)$$

Falls also w_p in $r = 0$ bekannt ist, kann nach (33) die Wirkung von $k^{(0)}_{(r)}$ allein durch Multiplikation der Urlösung (17) mit einem Faktor ermittelt werden. Weiter gilt ganz allgemein aus Überlagerungsgründen bei Vernachlässigung der Wirkung des Nebenstörsystems, wenn $w_{S(2)}$ die Wirkung des Hauptstörsystems bezeichnet,

$$\begin{aligned} w(0,0) &= w_p(0,0) + w_{S(2)}(0,0), \\ w\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= w_p\left(0, \frac{\pi}{2}\right) + w_{S(2)}\left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \qquad (34a)$$

Nun ist aber die Wirkung bzw. die Durchbiegung von $k^{(0)}_{(r)}$, also der Einzellast, in der Umgebung von $r = 0$ vom Winkel unabhängig, und es gilt $w_p(0, 0) = w_p\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Gemäß dem Verlauf der algebraischen Singularität in $r = 0$ ist die Wirkung von $S^{(2)}$ auf $\varphi = 0$ derjenigen auf $\varphi = \frac{\pi}{2}$ entgegengesetzt, also $w_{S(2)}(0,0) = -w_{S(2)}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ferner ist, wie schon einmal erwähnt, die Wirkung des Hauptstörsystems bei $\varphi = 0$ derjenigen von $k^{(0)}_{(r)}$ entgegengerichtet, so daß wir schließlich aus (34a) erhalten

$$\begin{aligned} w(0,0) &= w_p(0,0) - w_{S(2)}(0,0), \\ w\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= w_p(0,0) + w_{S(2)}(0,0). \end{aligned} \qquad (34)$$

Mit (34) und (33) entsteht nun für die Wirkung von $k^{(0)}_{(r)}$ allein längs der Hauptdurchbiegungslinie

$$w_p\left(r, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right) = \frac{w(0,0) + w\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{2\, w(0,0)} w\left(r, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right). \qquad (35)$$

Nach (34) kann man weiter die Größe des Anteils bestimmen, den die Hauptstörung gegenüber der Wirkung w_p ausmacht, und der vermöge (35) in erster Näherung eliminiert worden ist. Nach (34) wird

$$\left|\frac{100\, w_{S(2)}}{w_p}\right| = \frac{100}{\left|1 + 2\frac{c_2}{c_4}\right|} \mathrel{\widehat{=}} w_{S(2)}\ \% \text{ von } w_p . \tag{35a}$$

Um die Lösung für die Hauptdurchbiegungslinie nach (17) explizit angeben zu können, muß abschließend noch die Konstante c_1 errechnet werden. Dazu bildet man

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} k_{(r)}^{(0)}\, d\varphi = -\frac{K c_1\, 2\pi}{b^2} . \tag{36a}$$

Diese Summe muß nun in üblicher Weise gleich der gewünschten Einzellast P mit umgekehrten Vorzeichen sein, woraus folgt

$$c_1 = \frac{b^2 P}{2\pi K} . \tag{36}$$

Wenn man weiter aus rechentechnischen Gründen anstelle der Konstanten c_i nach (20)

$$\bar{c}_i = \frac{c_i}{c_1} \tag{20c}$$

einführt, so erhält man schließlich in erster Näherung gemäß (35) für die Hauptdurchbiegungslinie einer durch die Einzellast P exzentrisch beanspruchten und frei aufgelagerten Kreisplatte in exzentrosymmetrischen Parametern

$$w_p\left(r, \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}\right) = \frac{P b^2}{4\pi K} \frac{(2\bar{c}_2 + \bar{c}_4)}{(\bar{c}_2 + \bar{c}_4)(1 \mp r)^2} \left| r^2 \ln \frac{r}{r_0} + (r_0^2 - r^2)\left[\bar{c}_2 + \bar{c}_4 \pm \bar{c}_3\, r\right] \right| . \tag{37}$$

Führt man in (37) $r = \frac{r_0}{R_0}\varrho$ ein, wobei R_0 den wahren Plattenradius bedeutet, und geht mit $r_0 \to 0$ unter Beachtung, daß die c_i und b Funktionen von r_0 sind, so entsteht die bekannte Lösung für den konzentrischen Fall.

10. Numerische Ergebnisse. Jetzt soll zwischen der unter (37) hergestellten Näherungslösung und der von *E. Reißner* angegebenen exakten Lösung ein numerischer Vergleich der Hauptdurchbiegungslinien durchgeführt werden. Die Lösung von *E. Reißner* einer am Rande frei aufgelagerten und durch eine Einzellast belasteten Kreisplatte in Polarkoordinaten lautet

$$w^{(R)}(\varrho, \psi) = \frac{P R_0^2}{8\pi K} \operatorname{Real} \left\{ |z - a^2| \log \frac{a - z}{1 - a z} + (1 - a^2)(1 - \varrho^2)\left[2(a z)^{-\frac{1+\nu}{2}} \int_0^{\sqrt{a z}} \frac{t^\nu\, dt}{1 - t^2} - \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} \right] \right\} . \tag{38}$$

Hierin ist $z = (\varrho / R_0)\, e^{i\psi}$ zu setzen, $a R_0$ ist der Abstand vom Mittelpunkt, in dem die Einzellast P aufgebracht ist.

Es werden für den Vergleich von (37) und (38) drei Fälle verschiedener Exzentrizität ε betrachtet: $\varepsilon = 1/4\ R_0$, $\varepsilon = 1/2\ R_0$, $\varepsilon = 3/4\ R_0$; hieraus errechnet sich r_0, der Parameter des Plattenbegrenzungskreises, nach der Maßgabe $r_0 = \varepsilon / R_0$, was durch elementargeometrische Überlegungen an Abb. 1 leicht zu erkennen ist. Diese drei Fälle sollen der Reihe nach mit α, β, γ bezeichnet werden. Es werden durchgehend als konstant angenommen: erstens die Einzellast zu $P = 2\pi K / b_\gamma^2$, zweitens der Halbmesser der Platte mit $R_0 = 4$ und drittens die Querkontraktionszahl zu $\nu = 1/3$. Die Formel (35a) liefert dann als prozentualen Anteil, den die Hauptstörung $S^{(2)}$ gegenüber der Wirkung von $k_{(r)}^{(0)}$ ausmacht,

$$\left.\begin{aligned} &\alpha)\ w_{S(2)} = 4{,}6\,\% \text{ von } w_p , \\ &\beta)\ w_{S(2)} = 19{,}5\,\% \text{ von } w_p , \\ &\gamma)\ w_{S(2)} = 48{,}6\,\% \text{ von } w_p . \end{aligned}\right| \tag{39}$$

Um soviel Prozent, wie in (39) angegeben, wäre also die Hauptdurchbiegungslinie gemäß der Urlösung (17) falsch, wenn $S^{(2)}$ nicht eliminiert worden wäre.

Die Wirkung des durch die Nebenstörung hervorgerufenen singulären Momentes gemäß (27) wird ein sehr geringer Bruchteil der Wirkung von $S^{(2)}$ sein, also in Prozenten ein geringer Bruchteil derjenigen Wirkung, wie sie durch (39) angegeben ist.

Zum Vergleich der Funktionen (37) und (38) wurde der in (38) auftretende Integrand in eine Reihe bis zum siebenten Glied entwickelt und aufintegriert; dann wurde weiter der Realteil der nichtanalytischen komplexen Funktion gebildet, wobei man erhält:

$$w^{(R)}(\varrho,\,\psi) = \frac{P\,R_0^2}{8\,a\,K}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho^2}{R_0^2} - 2\,a\,\frac{\varrho}{R_0}\cos\psi + a^2\right)\ln\left(\frac{\dfrac{\varrho^2}{R_0^2} - 2\,a\,\dfrac{\varrho}{R_0}\cos\psi + a^2}{1 - 2\,a\,\dfrac{\varrho}{R_0}\cos\psi + a^2\,\dfrac{\varrho^2}{R_0^2}}\right)\right.$$
$$- (1-a^2)\left(1 - \frac{\varrho^2}{R_0^2}\right)\frac{1-\nu}{2\,(1+\nu)} + 2\,(1-a^2)\left(1-\frac{\varrho^2}{R_0^2}\right)\left[\frac{1}{1+\nu} + \frac{a\,\varrho}{R_0\,(3+\nu)}\cos\psi\right. \qquad (38a)$$
$$+ \frac{(a\,\varrho)^2}{R_0^2\,(5+\nu)}\cos 2\,\psi + \frac{(a\,\varrho)^3}{R_0^3\,(7+\nu)}\cos 3\,\psi + \frac{(a\,\varrho)^4}{R_0^4\,(9+\nu)}\cos 4\,\psi$$
$$\left.\left. + \frac{(a\,\varrho)^5}{R_0^5\,(11+\nu)}\cos 5\,\psi + \frac{(a\,\varrho)^6}{R_0^6\,(13+\nu)}\cos 6\,\psi + \frac{(a\,\varrho)^7}{R_0^7\,(15+\nu)}\cos 7\,\psi + \cdots\right]\right\}.$$

Hierin ist nun a mit r_0 zu identifizieren und $\psi = \pi$ bzw. 0 zu setzen. Beide Funktionen sind an den Stellen $\varrho = 0, 1, 2, 3, 4$ berechnet worden. Es wurden die in Tabelle I aufgeführten und durch Abb. 6 dargestellten Funktionswerte gefunden.

Tabelle I.

Fall	w nach Formel	$\varphi = \pi$ bzw. $\psi = 0$					$\varphi = 0$ bzw. $\psi = \pi$				Max. Abweichungen (37) gegenüber (38) treten auf an den Stellen:	
		$\varrho = 4$	$\varrho = 3$	$\varrho = 2$	$\varrho = 1$	$\varrho = 0$	$\varrho = 1$	$\varrho = 2$	$\varrho = 3$	$\varrho = 4$	$\varrho = 3, \varphi = 0$	$\varrho = 3, \varphi = \pi$
α	(37)	0	1,30	2,52	3,33	3,19	2,57	1,75	0,87	0	1,1%	0,77%
	(38)	0	1,31	2,52	3,33	3,19	2,58	1,77	0,88	0		
β	(37)	0	1,34	2,42	2,53	2,20	1,70	1,14	0,56	0	5,1%	1,5%
	(38)	0	1,32	2,36	2,52	2,24	1,77	1,19	0,59	0		
γ	(37)	0	1,20	1,43	1,30	1,06	0,80	0,52	0,25	0	13,8%	18,8%
	(38)	0	1,01	1,32	1,30	1,13	0,88	0,59	0,29	0		

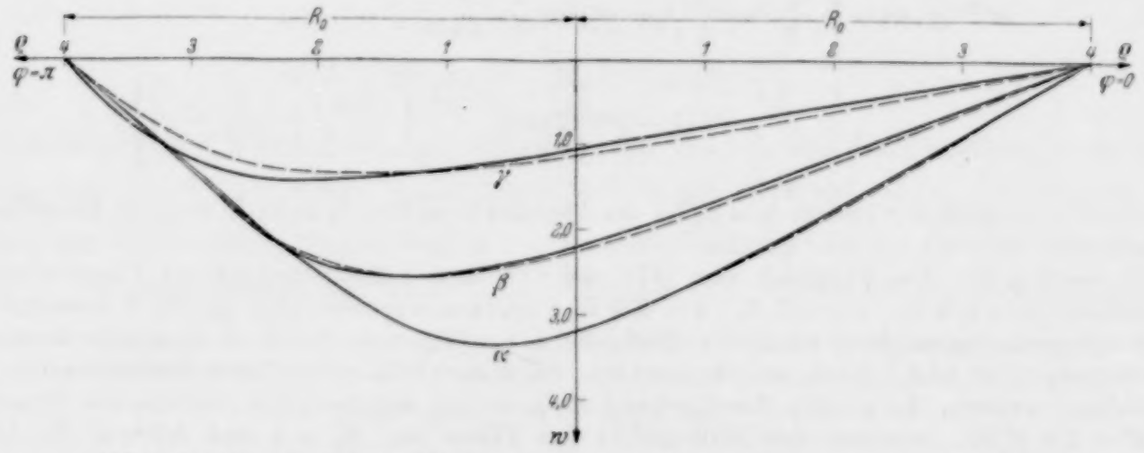

Abb. 6. Vergleich der Hauptdurchbiegungslinien. —— Näherungslösung, — — — exakte Lösung.

Wie man erkennt, ist die Übereinstimmung der Durchbiegungskurven für kleine Exzentrizitäten sehr gut; von Exzentrizitäten größer $1/2\,R_0$ ab dürfte jedoch die Brauchbarkeit der Lösung (37) in Frage gestellt sein. Andererseits ist zu bemerken, daß auch die praktische Verwendbarkeit der Lösung (38) nach *E. Reißner* immer geringer wird, je größer die Exzentrizität ist, da die Reihe in (38a) um so schlechter konvergiert, je größer $a = r_0$ ist. Für den Fall γ mußten, um die Genauigkeit der Tabelle I zu erreichen, sechs Glieder der Reihe berücksichtigt werden.

11. Extrapolation von den Ergebnissen für die Hauptdurchbiegungslinie auf die ganze Durchbiegungsfläche; Hebung der algebraischen Singularität. Von der Ähnlichkeitsrelation (33a) wissen wir, daß sie, falls die Exzentrizität nicht zu groß ist, mit sehr guter Näherung für $\varphi = 0$ bzw. π gilt; darüber hinaus nehmen wir an, daß für alle Linien $\varphi = \text{konst.}$ (Abb. 1) des exzentrosymmetrischen Bezugssystems diese Ähnlichkeitsrelation bestehen möge. Dann wird aus der so erweiterten Ähnlichkeitsrelation (33a)

$$\frac{w_p(r, \varphi)}{w(r, \varphi)} = \frac{w_p(0, \varphi)}{w(0, \varphi)} . \tag{40a}$$

Mit diesem Ansatz fällt die gesuchte Funktion $w_p(r, \varphi)$ längs der Hauptdurchbiegungslinie mit der bereits hergestellten Näherungslösung (37) zusammen, und außerdem enthält $w_p(r, \varphi)$ aus (40a) für $r = 0$ keine unendliche Vieldeutigkeit mehr. Dies leuchtet ein, wenn wir aus (40a) bilden

$$w_p(r, \varphi) = \frac{w_p(0, \varphi)}{w(0, \varphi)} w(r, \varphi) . \tag{40}$$

In (40) muß noch $w_p(0, \varphi)$ auf der rechten Seite eliminiert werden, damit $w_p(r, \varphi)$ allein durch Bestandteile der Urlösung (17) ausgedrückt ist. Nun gilt analog zu (34a) ganz allgemein aus Überlagerungsgründen für alle φ

$$\left.\begin{aligned} w(0, \varphi) &= w_p(0, \varphi) + w_{S(2)}(0, \varphi) , \\ w\left(0, \varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= w_p\left(0, \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + w_{S(2)}\left(0, \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{41a}$$

wobei wiederum $w_{S(2)}$ die Durchhängung in $r = 0$ sein soll, die allein durch die Wirkung des Hauptstörsystems entsteht. Ebenso wie schon einmal im Abschnitt **9** ist nun zu berücksichtigen, daß $w_p(0, \varphi) = w_p\left(0, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, und daß weiter $w_{S(2)}(0, \varphi) = - w_{S(2)}\left(0, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ wegen des Verlaufs der algebraischen Singularität über φ ist, so daß aus (41a) entsteht

$$\left.\begin{aligned} w(0, \varphi) &= w_p(0, \varphi) + w_{S(2)}(0, \varphi) , \\ w\left(0, \varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= w_p(0, \varphi) - w_{S(2)}(0, \varphi) . \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Mit (41) und (40) erhält man für die Durchbiegungsfläche w_p

$$w_p(r, \varphi) = \frac{w(0, \varphi) + w\left(0, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{2\, w(0, \varphi)} w(r, \varphi) . \tag{42a}$$

Diese Darstellung kann noch vereinfacht werden, denn nach (17) ist

$$w(0, \varphi) + w\left(0, \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = r_0^2 [2 c_2 + c_4] = w(0, 0) + w\left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{42b}$$

Damit wird aus (42a)

$$w_p(r, \varphi) = \frac{1}{2}\left[w(0, 0) + w\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right] \frac{w(r, \varphi)}{w(0, \varphi)} . \tag{42}$$

Die so konstruierte Funktion $w_p(r, \varphi)$ werden wir nun nachträglich auf ihre physikalische Bedeutung hin zu interpretieren haben, damit die Berechtigung der Voraussetzung, die zur Konstruktion von $w_p(r, \varphi)$ führte, bestätigt werden kann.

Mit (17) wird aus (42), wenn wir wieder $\bar{c}_i$ nach (20c) einführen und c_1 gemäß (36) einsetzen,

$$w_p(r, \varphi) = \frac{P b^2}{4 \pi K} \frac{2 \bar{c}_2 + \bar{c}_4}{B (\bar{c}_2 + \bar{c}_4 \cos^2 \varphi)} \left[r^2 \ln \frac{r}{r_0} + (r_0^2 - r^2) (\bar{c}_2 + \bar{c}_4 \cos^2 \varphi + \bar{c}_3 r \cos \varphi)\right]. \tag{43}$$

12. Physikalische Deutung der nach (43) gegebenen Funktion. Durch Einsetzen von (43) in (19) bestätigt man leicht, daß mit (43) die Durchbiegungsfläche einer am Rande frei aufgelagerten Kreisplatte gegeben ist. Wir wenden uns jetzt den Belastungsverhältnissen zu, wie sie durch (43) geliefert werden. Zuerst stellen wir nochmals fest, daß (43) im gesamten Plattenbereich wegen des angebrachten Zusatzfaktors $1/(c_2 + c_4 \cos^2 \varphi)$ singularitätenfrei ist, und also kein Punkt der Platte ausgeschlossen oder gesondert betrachtet zu werden braucht. Da die Auflagerbedingungen durch den Zusatzfaktor nicht gestört worden sind, ist anzunehmen, daß (43) im Gegensatz zu (17) nicht die homogene Plattengleichung $\Delta\Delta w = 0$ erfüllt. Flächen-

hafte Belastungen $p(r, \varphi)$ werden bekanntlich für die Theorie der dünnen Platte durch die inhomogene Plattengleichung wie folgt geliefert:

$$K \Delta \Delta w_p(r, \varphi) = p(r, \varphi) , \tag{44}$$

wobei K die Plattensteifigkeit aus (6) ist. Bevor jedoch die flächenhafte Last $p(r, \varphi)$ behandelt wird, soll (43) auf singuläre Lasten untersucht werden; denn laut Konstruktion müssen wir in $r = 0$ eine Einzellast annehmen. Demnach bilden wir mit (43) an einer beliebigen Stelle $r =$ konst. die Summe aller Querkräfte von 0 bis 2π und bezeichnen die resultierende entgegengerichtete Kraft mit $P_R(r)$. Mit (9), (5), (4) und (11) erhält man

$$P_R(r) = \frac{2 c_2 + c_4}{2 \sqrt{c_2 (c_2 + c_4)}} P = \varkappa P . \tag{45}$$

Aus (45) lesen wir ab, daß P_R keine Funktion von r ist, woraus folgt, daß die Flächenlast $p(r, \varphi)$ der Platte auf jedem beliebigen Ring von der Breite Δr die resultierende Null hat, wegen $P_R(r + \Delta r) - P_R(r) = 0$. Weiter erkennen wir aus (45), daß in $r = 0$ die Einzellast P_R wirkt. Das ist aber gerade der gewünschte Belastungsfall. Der Faktor $\varkappa$ aus (45) ist deutbar als

$$\frac{w(0,0) + w\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{w(0,0)\, w\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}} = \varkappa ; \tag{45a}$$

d. h. man dividiere das arithmetische Mittel der Funktionswerte der Urlösung (17) in $r = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ durch das geometrische Mittel derselben Funktionswerte. Wir wissen im vornherein, daß das geometrische Mittel stets kleiner als das arithmetische Mittel ist, und zwar unterscheiden sich beide Mittelwerte um so weniger, je dichter die Bezugszahlen liegen. Da die Größe des Unterschiedes von $w(0, 0)$ und $w\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ durch die Größe des Störsystems $S^{(2)}$ festgelegt wird, erkennt man, daß $\varkappa$ sich für kleine Exzentrizitäten wenig von 1 unterscheiden wird, da das Hauptstörsystem $S^{(2)}$ mit verschwindenden Exzentrizitäten wie r_0^4 gegen Null geht. Für die in Abschnitt **10** behandelten Fälle α, β, γ ergibt sich z. B. für $\varkappa$:

$$\varkappa_\alpha = 1{,}001 , \qquad \varkappa_\beta = 1{,}019 , \qquad \varkappa_\gamma = 1{,}140 . \tag{45b}$$

Mithin ist für nicht zu große Exzentrizitäten, auf die der Anwendungsbereich der Funktion (43) ohnehin beschränkt ist, die nach (43) gelieferte Durchbiegungsfläche einer frei aufgelagerten Platte mit hinreichender Genauigkeit durch die Einzellast P belastet.

Die Wirkung der nach (44) zum gewünschten Belastungsfall zusätzlich auftretenden „Gleichgewichtsbelastung" muß von vornherein als gering angenommen werden, da die Hauptdurchbiegungslinie aus (43), die auf Lasten am ehesten reagiert, mit der exakten Hauptdurchbiegungslinie nach *Reißner* gemäß (38) sehr gut übereinstimmt. Um diese Tatsache auch numerisch zu belegen, wurde die „Gleichgewichtslast" (44) von $\varphi = 0$ bis $\frac{\pi}{4}$ über die Plattenfläche aufintegriert, wobei entsprechend dem Prinzip von *de Saint-Venant* um den Punkt $r = 0$ ein Kreis, dessen Flächeninhalt 5% der gesamten Plattenfläche ausmachte, bei der Integration weggelassen wurde, wodurch also nur solche Zonen der „Gleichgewichtsbelastung" erfaßt sind, von denen man annehmen kann, daß sie auch als „Gleichgewichtssystem" fähig sind, merkbare Durchbiegungen zu erzeugen. Die so entstehende resultierende Kraft W der „Gleichgewichtsbelastung" wurde für die drei in Abschnitt **10** behandelten Fälle berechnet zu

$$W_\alpha = 0{,}002\ P , \qquad W_\beta = 0{,}093\ P , \qquad W_\gamma = 0{,}646\ P . \tag{46a}$$

Die Werte (46a) dividiert durch die zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$ eingeschlossenen Flächeninhalte liefern die folgenden mittleren Spannungen σ_m:

$$\sigma_{m,\alpha} = 0{,}00019\ P , \qquad \sigma_{m,\beta} = 0{,}0056\ P , \qquad \sigma_{m,\gamma} = 0{,}0286\ P . \tag{46}$$

In Abb. 7 sind die aus der „Gleichgewichtsbelastung" $p(r, \varphi)$ resultierenden mittleren Spannungen σ_m / P, wie sie nach (46) geliefert werden, in Abhängigkeit vom Parameter r_0 dargestellt. Miteingezeichnet wurde die mittlere Spannung $\sigma_0 / P = 1/\pi R_0^2$, wie sie bei gleichmäßiger Verteilung der Einzellast P über die ganze Plattenfläche auftreten würde, und man erkennt, da die Wirkung von σ_0 im Vergleich zu derjenigen von P als Einzellast im ungünstigsten

Fall etwa 40% betragen kann, wie ein einfacher Vergleich im konzentrischen Fall lehrt, daß bis zu $r_0 = 0{,}5$ die durch die „Gleichgewichtsbelastung" auftretende Störung des Einzellastfalles vernachlässigbar klein ist, zumal die hier durchgeführte Abschätzung sehr grob ist und weit über den tatsächlich auftretenden Störungen liegen wird.

Um die Wirkung von $p(r, \varphi)$ als äußere Last zu klären, blieben gemäß dem Prinzip von *de Saint-Venant* die Flächenlasten innerhalb eines kleinen Kreises um $r = 0$ unberücksichtigt. Es ist jedoch möglich, wenn die Flächenlasten um $r = 0$ auch nicht als äußere Lasten wirksam werden können, daß sie ebenso wie das Störsystem $S^{(1)}$ aus (24) ein singuläres Moment in $r = 0$ erzeugen. Es läßt sich jedoch leicht bestätigen, daß dies nicht der Fall ist.

Damit ist gefunden, daß die vorausgesetzte erweiterte Ähnlichkeitsrelation (40a) mit großer Näherung für nicht zu große Exzentrizitäten bis etwa $r_0 = \frac{1}{2}$ richtig ist und mit (43) eine recht gute Näherungslösung der Durchbiegungsfläche einer am Rande frei aufgelagerten und exzentrisch durch die Einzellast P belasteten Kreisplatte konstruiert worden ist.

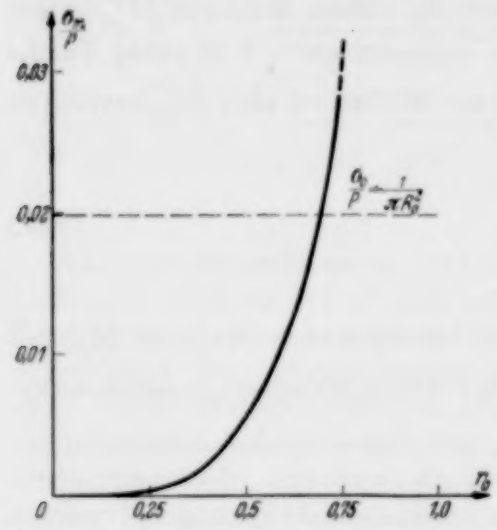

Abb. 7. Zunahme der Störwirkung nach (44) mit wachsender Exzentrizität.

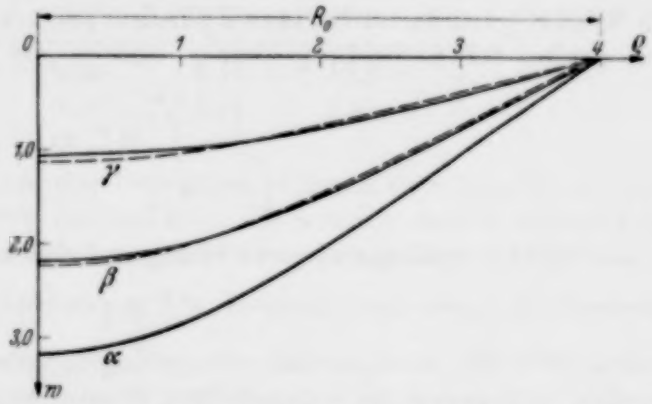

Abb. 8. Durchbiegungslinien unter dem zur Hauptdurchbiegungslinie orthogonalen Radius der Platte.
——— Näherungslösung, — — — exakte Lösung.

13. Numerische Ergebnisse. Mit (43) ist nun die Durchbiegungsfläche für alle φ gegeben, und so wie bei Funktion (37) ein Vergleich mit der exakten Lösung durchgeführt wurde, soll jetzt ein Vergleich zwischen der *Reißner*schen Lösung (38) und der Näherungslösung (43) längs des zur Hauptdurchbiegungslinie orthogonalen Durchmessers der Platte angestellt werden.

Wegen der Symmetrie der Lösungen reicht es aus, nur einen Radius, der unter dem orthogonalen Durchmesser entstehenden Durchbiegungslinie zu betrachten. Dazu ist in (38) bzw. (38a) $\psi = \frac{\pi}{2}$ zu setzen. Es wurden vier Punkte berechnet, und zwar $\varrho_n = R_0/n$ für $n = 1, 4/3, 2, 4, \infty$. Es wurden nun wiederum die in Abschnitt **10** behandelten Beispiele zugrunde gelegt, und man erhält für die Durchbiegungen die in Tabelle II angegebenen Werte, deren gute Übereinstimmung in Abb. 8 ersichtlich ist.

Tabelle II.

Fall	ϱ_n/R_0 / Formel	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
α	(43)	3,19	2,84	2,04	1,01	0
	(38)	3,19	2,84	2,03	1,02	0
β	(43)	2,20	2,02	1,49	0,77	0
	(38)	2,24	2,03	1,47	0,74	0
γ	(43)	1,06	1,00	0,77	0,41	0
	(38)	1,13	1,03	0,75	0,38	0

14. Dimensionierung exzentrisch durch Punktlast belasteter Kreisplatten. Bisher wurden nur Durchbiegungen behandelt, und es ist mit den gefundenen Ergebnissen möglich, an jedem Punkt einer frei aufgelagerten Kreisplatte, die exzentrisch durch eine Einzellast belastet ist, für nicht zu große Exzentrizitäten die Durchbiegung mit großer Genauigkeit anzugeben. Weitaus wichtiger als die Dimensionierung nach den Verformungen dürfte jedoch die Bemessung nach Momenten sein. Wie bekannt, liefern die Punktlastlösungen dünner Platten unendlich große Momente unter dem Lastangriffspunkt. Für gewöhnlich geht man nun so vor, um

diese Lösungen dennoch zur Momentendimensionierung heranziehen zu können, daß man die Größe des Momentes in einer solchen Entfernung s_{r_ε} vom theoretischen Lastangriffspunkt betrachtet, wie sie dem tatsächlichen Halbmesser des Laststempels entspricht. Andererseits muß gefordert werden, daß für die sinnvolle Verwendung einer Punktlastlösung der Halbmesser s_{r_ε} des Laststempels im Verhältnis zum Plattendurchmesser sehr klein sei. Deshalb können wir uns bei der Berechnung des Dimensionierungsmomentes $M_{(r)}$ darauf beschränken, die Untersuchungen in der Umgebung des Punktes $r = 0$ zu führen, was durch einen Nullkreis über dem Funktionssymbol bzw. durch den Index ε bei r angedeutet werden wird.

Um das Moment $M_{(r)}$ in der Umgebung von $r = 0$ zu berechnen, ziehen wir die singularitätenfreie Lösung (43) heran. Diese gibt die Durchbiegungsfläche einer am Rande frei aufgelagerten Kreisplatte, die nach (45) durch die Einzellast $\varkappa P$ belastet ist und außerdem zusätzlich durch ein „Gleichgewichtssystem" von Flächenlasten beansprucht wird, dessen Wirkungen sich als vernachlässigbar klein gegenüber derjenigen der Punktlast herausgestellt hatten. Wir bemerken zuerst, daß das durch eine Einzellast hervorgerufene Moment $M^P_{(r)}$ in der Umgebung von $r = 0$ mit hinreichender Genauigkeit auch im exzentrischen Fall keine Funktion vom Winkel φ ist, da im Kleinen Zylindersymmetrie herrscht. Mithin ist also $\overset{\circ}{M}{}^P_{(r)}$ invariant gegen Integralmittelwertbildung über φ, und es gilt

$$\frac{1}{\int\limits_0^{2\pi} ds_\varphi} \int\limits_0^{2\pi} \overset{\circ}{M}{}^P_{(r)}\, ds_\varphi = \overset{\circ}{M}{}^P_{(r)} \,. \tag{47a}$$

Wenden wir die Integralmittelwertbildung auf das aus (43) zu bestimmende Moment $\overset{\circ}{M}_{(r)}$ an, so ist einerseits das gesuchte Moment $\overset{\circ}{M}{}^P_{(r)}$ gegenüber dieser Operation invariant, und andererseits werden die in $\overset{\circ}{M}_{(r)}$ noch enthaltenen geringfügigen aus der „Gleichgewichtszusatzbelastung" herrührenden Störungen im wesentlichen eliminiert, eben deshalb, weil ein „Gleichgewichtssystem" über φ um Null alternierende Spannungs- und Momentenzustände erzeugt. Darüber hinaus hat die Formel für den Integralmittelwert des Schnittmomentes eine erheblich einfachere Gestalt als der Differentialoperator, der das Moment selbst liefert. Da die Dimensionierungsformeln für die Schnittmomente dasjenige Ergebnis jeder theoretischen Plattenuntersuchung darstellt, auf das die Praxis letztlich am meisten Wert legt, soll in diesem Fall der Faktor $\varkappa$ aus (45) nicht identisch gleich 1 gesetzt werden, sondern seine wenig von 1 verschiedenen Werte werden, was besonders für größere Exzentrizitäten eine Verbesserung bedeutet, exakt berücksichtigt, was physikalisch soviel bedeutet, daß die Platte nicht wie nach (43) durch $\varkappa P$ belastet wird, sondern genau mit P. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, brauchen wir die Lösung (43) nur mit $1/\varkappa$ durchzumultiplizieren, oder einfacher, da $\varkappa$ eine Konstante ist, wir multiplizieren nachträglich $\overset{\circ}{M}_{(r)}$ mit $1/\varkappa$. So entsteht schließlich die Formel für das gesuchte Dimensionierungsmoment

$$\overset{\circ}{M}{}^P_{(r)} = \frac{1}{2\pi\varkappa} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\overset{\circ}{M}_{(r)}}{B}\right) d\varphi \,, \tag{47}$$

worin $M_{(r)}$ das nach (43) zu berechnende Moment und $\varkappa$ der durch (45) bzw. (45a) gegebene Faktor ist. Geht man mit dem Differentialoperator nach (9) für das Moment $M_{(r)}$ unter Zuhilfenahme von (10) in (47) ein und beachtet $\left(\frac{\overset{\circ}{1}}{B}\right) = 1 + 2\, r_\varepsilon \cos\varphi + \cdots$, so erhält man unter Weglassung der Glieder, die für $r \to 0$ nach Null gehen, nachdem U und V gemäß (4) ersetzt und aufintegriert wurde,

$$\overset{\circ}{M}{}^P_{(r)} = -\frac{P}{8\pi}\left[2\,(1+\nu)\ln\frac{r_\varepsilon}{r_0} - r_0^2\,(1-\nu)\left(1+\frac{1}{\varkappa}\,2\,\bar{c}_3\right) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,(1-\nu)\,4\,r_0^2\,\frac{\bar{c}_2\,\bar{c}_3}{\bar{c}_4}\right]. \tag{48}$$

Nimmt man hierin nachträglich $\varkappa$ wieder gleich 1, so entsteht für kleine Exzentrizitäten die noch einfachere Formel

$$\overset{\circ}{M}{}^P_{(r)} = -\frac{P}{8\pi}\left[2\,(1+\nu)\ln\frac{r_\varepsilon}{r_0} - r_0^2\,(1-\nu)\,(1+2\,\bar{c}_3)\right]. \tag{48a}$$

Der Vollständigkeit halber und zum Vergleich ist auch das Dimensionierungsmoment für den Fall der eingespannten Platte berechnet worden. Man erhält [1] aus (47) mit $\varkappa = 1$

$$\underset{eingespannt}{\overset{\circ}{M}{}^{P}_{(r)}} = -\frac{P}{8\pi}\left[2\,(1+\nu)\ln\frac{r_\varepsilon}{r_0} + 2 + (1+\nu)\,r_0^2\right]. \tag{49}$$

Die Abklingung der Momente bei wachsender Exzentrizität ist für den frei aufgelagerten und eingespannten Fall, wie sie durch (48) und (49) geliefert wird, für zwei verschiedene Querkontraktionszahlen in Tabelle III angegeben und in Abbildung 9 dargestellt, wobei für die Berechnung jeweils ein Parameter r_ε so gewählt ist, daß alle Momente in einer Entfernung von $r = 0$ berechnet sind, die 3% des Plattenradius beträgt.

Tabelle III.

	Formel	$r_0 = 0$	$r_0 = \frac{1}{4}$	$r_0 = \frac{1}{2}$	$r_0 = \frac{3}{4}$	$r_0 = 1$
$\nu = \frac{1}{3}$	(48)	9,35	9,17	8,53	7,01	0
	(49)	7,35	7,09	6,25	4,40	0
$\nu = 0$	(48)	7,01	6,86	6,34	5,10	0
	(49)	5,01	4,82	4,19	2,80	0

15. Zusammenfassung. Behandelt wurde das Problem der durch eine Einzellast exzentrisch belasteten und am Rande frei aufgelagerten Kreisplatte. Es wurden dem Problem angepaßte Parameter, als exzentrosymmetrische Koordinaten bezeichnet, eingeführt. Durch invariante Schreibung der Schnittgrößen gelang es, diese sofort für exzentrosymmetrische Koordinaten anzugeben. Unter Zugrundelegung eines bekannten Satzes über die Lösungen der homogenen Plattengleichung in Polarkoordinaten wurde durch Transformation eine Darstellung aller Lösungen der homogenen Plattengleichung in exzentrosymmetrischen Koordinaten gewonnen. Durch Vorgabe der vier einfachsten Potentialfunktionen wurde dann eine Funktion gefunden, die geeignet war, die Randbedingungen der freien Auflagerung zu befriedigen, jedoch im Einzellastangriffspunkt eine algebraische Singularität enthielt. Durch physikalische Deutung dieser Singularität konnte eine Näherungslösung für die Hauptdurchbiegungslinie konstruiert werden mit der Tendenz, mit wachsender Exzentrizität an Genauigkeit abzunehmen. Weiter wurde durch Verallgemeinerung der Methoden, die sich zur Konstruktion der Näherungslösung für die Hauptdurchbiegungslinie bewährt hatten, eine singularitätenfreie Lösung für die gesamte Durchbiegungsfläche aufgefunden. Die singularitätenfreie Lösung für alle φ war dann geeignet, die zur Dimensionierung notwendigen Momente zu ermitteln.

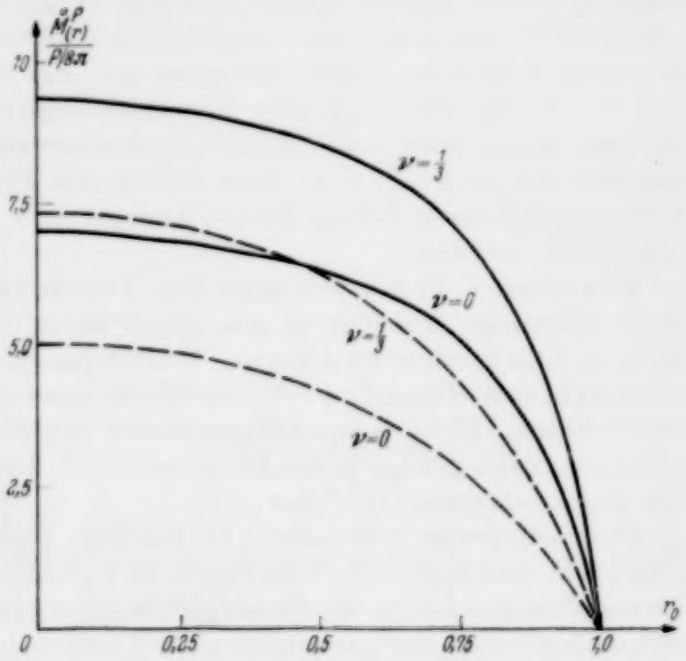

Abb. 9. Momentenabklingung mit wachsender Exzentrizität.
—— nach (48), — — — nach (49).

(Eingegangen am 19. März 1954).

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Karlheinz Nasitta*, Technische Universität Berlin-Charlottenburg, Lehrstuhl für Mechanik Prof. Dr.-Ing. *I. Szabó*.

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 89.

Über spezielle Systeme von Tragflügelgittern II.

(Theorie der dünnen Profile.)

Von **K. Nickel.**

1. Einleitung. In einer I. Abhandlung [1] wurde über Systeme von Flügelgittern berichtet, die sich aus unendlich vielen „tragenden Linien" aufbauen. Die vorliegende Arbeit behandelt die ebene Strömung durch endlich viele Gitter aus dünnen Profilen (Abb. 1 und 6). Die beiden Teile I und II zusammen erweitern die Ergebnisse des Verfassers über Systeme von Einzelflügeln [2] auf Systeme von Flügelgittern.

Die Voraussetzungen über das strömende Medium sind dieselben wie in I: es wird reibungsfreie, stationäre und inkompressible Potentialströmung angenommen. Dabei kann die letzte Einschränkung in gewissem Umfange fortfallen, da man eine kompressible Unterschallströmung mittels der *Prandtl*schen Regel auf eine äquivalente inkompressible Strömung abbilden kann [3]. Um die Formelausdrücke übersichtlich zu erhalten, wird jedoch im folgenden auf die Ausführung dieser Transformation verzichtet.

Es werden nicht sämtliche möglichen Systeme von Profilgittern behandelt, sondern nur die spezielle Anordnung, daß alle Gitter parallele Gitterfronten besitzen; zudem ist dies auch der einzige in den Anwendungen auftretende Fall. Darüber hinaus müssen zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung noch gleiche Gitterteilungen $t = |h|$ (Abb. 1) vorausgesetzt werden. Diese weitere Einschränkung ist allerdings in der Praxis schon nicht mehr immer erfüllt (z. B. Leitgitter mit vorgelagerter Stützenreihe). Schließlich besitzt ein Teil der mitgeteilten Ergebnisse sogar nur unter der noch viel einschneidenderen Bedingung Gültigkeit, daß die Gitter alle senkrecht (Gleichdruckgitter) oder waagrecht stehen und die Schaufeln hintereinander oder „auf Lücke" angeordnet sind. Die im folgenden angewandte Methode ist dieselbe wie früher [2], d. h. man ersetzt die Profile durch eine Wirbel-, bzw. Quell-Senken-Belegung auf ihrer Sehne. Damit können dann auch nur kleine Profildicken und -Wölbungen zugelassen werden.

Für diese, z. T. schwerwiegenden, Einschränkungen und Vernachlässigungen tauscht man dann allerdings den Vorteil ein, geschlossene Ausdrücke für Druckverteilung, Auftrieb und Moment anschreiben zu können. Weiter lassen sich mit gewissen Modifikationen die Rechenverfahren von *Riegels* und *Truckenbrodt* samt ihren ein für allemal berechneten Konstanten übernehmen. Für gewisse Gittersysteme aus Streckengittern sind überdies die erhaltenen Ergebnisse exakt gültig, steht die verwendete Singularitätenmethode also in Übereinstimmung mit der konformen Abbildung.

Die vorliegende Abhandlung ist wie folgt gegliedert: In Ziff. 2 werden die Grundgleichungen aufgestellt und daraus die Störungen im Unendlichen berechnet. Es werden die oben erwähnten Vernachlässigungen in die Grundgleichungen eingeführt und weiter die beiden Typen des „gewöhnlichen" und des „alternierenden" Gitters in Sonderfällen als ebene Strahlströmungen gedeutet. Ziff. 3 enthält die wichtigsten Formeln für die Behandlung der ersten und der zweiten Grundaufgabe im Falle eines einzelnen Gitters ($n = 1$), Ziff. 4, dasselbe für ein System aus n Profilgittern ($n \geq 1$), außerdem werden dort einige wichtige Folgerungen für Skelettprofile zusammengestellt. In Ziff. 5 schließlich werden zuerst die exakten Lösungen im Falle eines speziellen Doppelgitters aus Streckenprofilen mitgeteilt. Anschließend werden die Formeln aus Ziff. 3 angewandt, um die *Truckenbrodt*sche und *Riegels*sche Theorie auf Profilgitter zu übertragen, wobei noch geprüft wird, wieweit die Gültigkeit einer linearen Theorie für endlich dicke Profile reicht.

2. Vorbemerkungen. Die folgenden Betrachtungen sind allgemein für Systeme aus beliebig vielen Profilgittern gültig. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, werden sie jedoch nur für den Fall eines einzigen Gitters ($n = 1$) formuliert.

---

[1] *K. Nickel*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 108, im folgenden kurz als I zitiert.

[2] *K. Nickel*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 363.

[3] Man vergleiche dazu *P. Byrd* und *M. Huggins*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 191, sowie *H. Schlichting*, Z. Flugwissensch. 1 (1953), S. 109.

a) Ein Profilgitter in der komplexen z-Ebene sei durch seine Profilkontur C und die Gitterkonstante $k = \pi/h = \pi/(h_1 + i\,h_2)$ gegeben (Abb. 1). Man denkt sich die Strömung $U + i\,V$ in der z-Ebene zusammengesetzt aus einer parallelen Grundströmung $u_\infty\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, der noch eine Störströmung $u + i\,v$ überlagert ist. Diese Störströmung, die also den Einfluß des Flügelgitters wiedergibt, sei erzeugt durch eine Wirbelbelegung $\gamma(z)$ auf den Konturen C und berechnet sich für die Stelle z aus der Formel [1]

$$u(z) - i\,v(z) = \frac{i\,k}{2\,\pi} \int_C \gamma(\zeta)\,\operatorname{ctg} k\,(z - \zeta)\,d\zeta\,. \tag{1}$$

Die Stärke γ der Wirbel unterliegt dabei der Bedingung, daß die Profilkontur nicht durchströmt werden darf, daß also die Strömung

$$U(z) + i\,V(z) = u_\infty\,(\cos\alpha + i \sin\alpha) + u(z) + i\,v(z)$$

für alle Punkte z auf C die Richtung der Tangente von C besitzen muß. Sei etwa $\chi(z)$ der Richtungswinkel der Profiltangente im Punkte z gegenüber der reellen Achse (Abb. 1), so lautet diese Umströmungsbedingung für alle z auf C

$$\left.\begin{aligned} u_\infty \sin[\alpha - \chi(z)] = \cos\chi(z)\; Im\left\{\frac{i\,k}{2\,\pi} \oint_C \gamma(\zeta)\,\operatorname{ctg} k\,(z - \zeta)\,d\zeta\right\} + \\ + \sin\chi(z)\; Re\left\{\frac{i\,k}{2\,\pi} \oint_C \gamma(\zeta)\,\operatorname{ctg} k\,(z - \zeta)\,d\zeta\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Da hier der Aufpunkt z auf dem Integrationsweg C liegt, sind die beiden Integrale singulär. Sie sind als *Cauchy*sche Hauptwerte zu nehmen, was durch das Symbol $\oint$ gekennzeichnet werden soll.

b) Im Gegensatz zur Umströmung eines Einzelprofils verursacht ein Profilgitter im Unendlichen eine endliche Ablenkung der Grundströmung. Um diese zu bestimmen, genügt es offenbar, die Störungskomponente für $z = \pm\infty$, also allein in Richtung der reellen Achse zu betrachten, da über die Lage des Achsenkreuzes zum Gitter nichts vorausgesetzt war. Es gilt für alle $h_2 \neq 0$

$$\lim_{z \to \pm\infty} \operatorname{ctg} k z = \pm\, i$$

und also in (1)

$$\lim_{z \to \pm\infty} [u(z) - i\,v(z)] = \mp\,\frac{k}{2\,\pi} \int_C \gamma(\zeta)\,d\zeta\,.$$

Damit findet man für $h_2 \neq 0$

$$[U + i\,V]_{\pm\infty} = u_\infty \cos\alpha \mp \frac{\Gamma}{2}\,\frac{h_1}{h_1^2 + h_2^2} + i\left(u_\infty \sin\alpha \mp \frac{\Gamma}{2}\,\frac{h_2}{h_1^2 + h_2^2}\right) \tag{3}$$

mit der Profilzirkulation $\Gamma = \int_C \gamma(\zeta)\,d\zeta$ oder in Worten:

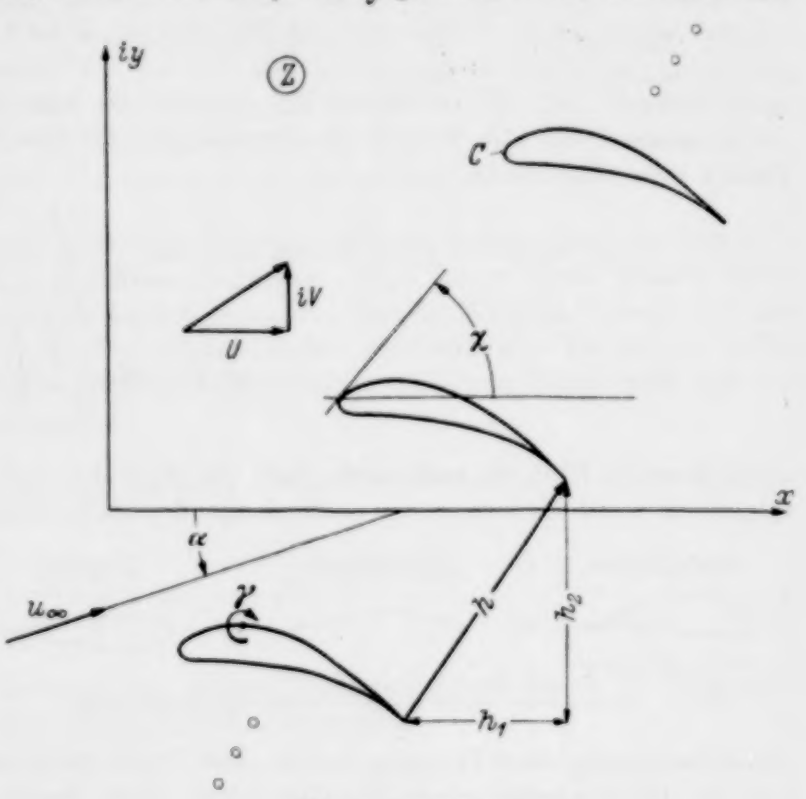

Abb. 1. Profilgitter.

Die induzierte Zusatzgeschwindigkeit des Gitters im Unendlichen ist von der Gestalt des Gitterprofils unabhängig und hängt nur ab von der Profilzirkulation und der Gitterkonstanten.

Formuliert man dies Resultat gleich im allgemeinen Falle für ein System aus n Schaufelgittern, so ergibt sich:

---

[1] Die Integration über die geschlossene Kontur C möge hier und im folgenden immer im mathematisch positiven Sinne erfolgen.

Jedes System aus n Schaufelgittern mit den Zirkulationen Γ_ν und der einheitlichen Gitterkonstanten k hat im Unendlichen dieselbe Wirkung wie ein einziges Gitter aus Einzelwirbeln mit der Zirkulation $\Gamma = \sum_{\nu=1}^{n} \Gamma_\nu$ und der Gitterkonstanten k. Die Strömungskomponenten weit vor bzw. weit hinter dem System sind durch Gleichung (3) gegeben.

Im Gegensatz zur Umströmung bei einem einzelnen Profil (oder auch bei endlich vielen), wo im Unendlichen die Parallelströmung u_∞ ($\cos\alpha + i \sin\alpha$) herrscht, kann man hier u_∞ also nur als „mittlere" Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen und ebenso α nur als „mittleren" Profilanstellwinkel deuten, sie hängen nach (3) über die Formeln

$$4\,u_\infty^2 = (U_{-\infty} + U_{+\infty})^2 + (V_{-\infty} + V_{+\infty})^2\,, \qquad 2\,u_\infty \sin\alpha = V_{-\infty} + V_{+\infty} \tag{4}$$

eindeutig mit den Geschwindigkeitskomponenten vor bzw. hinter der Gitterfront zusammen. Dieser Sachverhalt ist bei der Wahl eines Bezugsanstellwinkels und eines Bezugsstaudrucks zu beachten. Die folgenden Resultate sind einheitlich auf u_∞ und α bezogen.

c) Zur Berechnung einer gesuchten Gitterströmung dient die Integralbedingung (2). Je nachdem, ob darin die Wirbelstärke $\gamma(z)$ oder die Kontur C gegeben ist, spricht man von der ersten oder zweiten Hauptaufgabe [1]:

Erste Hauptaufgabe. Gegeben: Zu- und Abströmung [also nach b) auch u_∞ und α] sowie $\gamma(z)$.
Gesucht: k und C.

Zweite Hauptaufgabe. Gegeben: Zuströmung, k und C.
Gesucht: $\gamma(z)$ und Abströmung.

Beide Aufgaben bieten in dieser Allgemeinheit große Lösungschwierigkeiten. Beim ersten Problem sind in (2) die Integrale längs der Kontur C zu erstrecken, die jedoch gerade erst bestimmt werden soll. Beim zweiten Problem muß in Gleichung (2) eine *Fredholm*sche Integralgleichung erster Art aufgelöst werden, für die ein lösender Kern im allgemeinen Falle bis heute nicht bekannt ist. Es ist daher angebracht, die Gleichung (2) zu vereinfachen. Hierzu werde die Kontur C für alle Profile durch eine gerade Strecke $< a, b >$, die Profil„sehne" ersetzt. Damit geht (2) über in

$$\left.\begin{aligned} u_\infty \sin[\alpha - \chi(x)] = \cos\chi(x)\; Im\left\{\frac{i\,k}{2\,\pi}\oint_a^b \gamma(\xi)\,\operatorname{ctg} k\,(x-\xi)\,d\xi\right\} + \\ + \sin\chi(x)\; Re\left\{\frac{i\,k}{2\,\pi}\oint_a^b \gamma(\xi)\,\operatorname{ctg} k\,(x-\xi)\,d\xi\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

wenn man o. B. d. A. annimmt, daß die Strecke $< a, b >$ auf der x-Achse gelegen sei. Im folgenden wird also eine spezielle Lage des Achsenkreuzes gewählt, bei der die reelle Achse eine der Profilsehnen verlängert.

Abb. 2. Aufbau eines Profils aus Skelettlinie und Profiltropfen.

Diese Vernachlässigung entspricht genau dem Vorgehen bei Einzelprofilen, wo man das Profil in eine Skelettlinie und einen Profiltropfen aufspaltet (Abb. 2) und das Skelett durch eine Wirbelbelegung, den Tropfen durch eine Quell-Senken-Belegung auf der Profilsehne ersetzt [2]. Für die Berechnung eines Profilskeletts geht damit die erste Aufgabe über in die Auswertung eines singulären Integrals, die zweite Aufgabe in eine gegenüber früher stark vereinfachte *Fredholm*sche Integralgleichung erster Art. Für die Berechnung des Tropfens liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Durch die obige Vereinfachung hat man zwar schon bei den Grundgleichungen einen gewissen Fehler gemacht, doch zeigen Kontrollrechnungen, daß der Fehler im Endresultat für dünne, wenig gekrümmte Einzelprofile genügend klein ist und daß man ziemlich alle praktisch vorkommenden Fälle mit dieser Methode behandeln darf.

[1] Vgl. *H. Schlichting*, Fußnote 3 von S. 102, doch ist in dieser Arbeit bei der Definition der ersten Hauptaufgabe ein Irrtum unterlaufen.

[2] Vgl. *F. Riegels*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 373 und Ing.-Arch. 17 (1949), S. 94; *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 365.

Sehr viel ungünstiger liegen dagegen die Verhältnisse bei Profilgittern. Einerseits hat man in der Praxis gerade auch an stark gekrümmten Schaufelprofilen großes Interesse, für die ein Ersetzen des Profils durch eine Wirbel- und Quell-Senken-Belegung auf der Profilsehne recht gewaltsam erscheint. Andererseits ist aber auch schon bei wenig gekrümmten Profilen eine direkte Übernahme der *Riegels*schen Theorie nicht mehr möglich, sobald die Schaufelabstände klein sind, da dann die gegenseitige Beeinflussung der Profile zu groß wird, wie in 5 d) gezeigt wird.

Im folgenden werden nur Gitter aus wenig gekrümmten Skelettprofilen (Dicke Null) untersucht und nur im Anhang 5 c) und 5 d) wird noch kurz auf Profiltropfen eingegangen. Für die Berechnung stark gekrümmter, dicht stehender Schaufeln kann die nachstehend entwickelte Theorie jedoch immerhin als erste Näherung für ein Iterationsverfahren auf der Basis von Gleichung (2) dienen.

d) Entsprechend, wie es in I S. 116ff. geschehen ist, läßt sich auch hier als einfachstes System von Schaufelgittern das „alternierende" Gitter einführen. Die Gleichung (1) ersetzt sich dann unter den obigen Vereinfachungen durch

$$u(x) - i\,v(x) = \frac{i\,k}{2\,\pi}\,\oint_a^b \frac{\gamma(\xi)}{\sin k\,(x-\xi)}\,d\xi\,, \qquad \text{(1a)}$$

und Gleichung (2) modifiziert sich entsprechend.

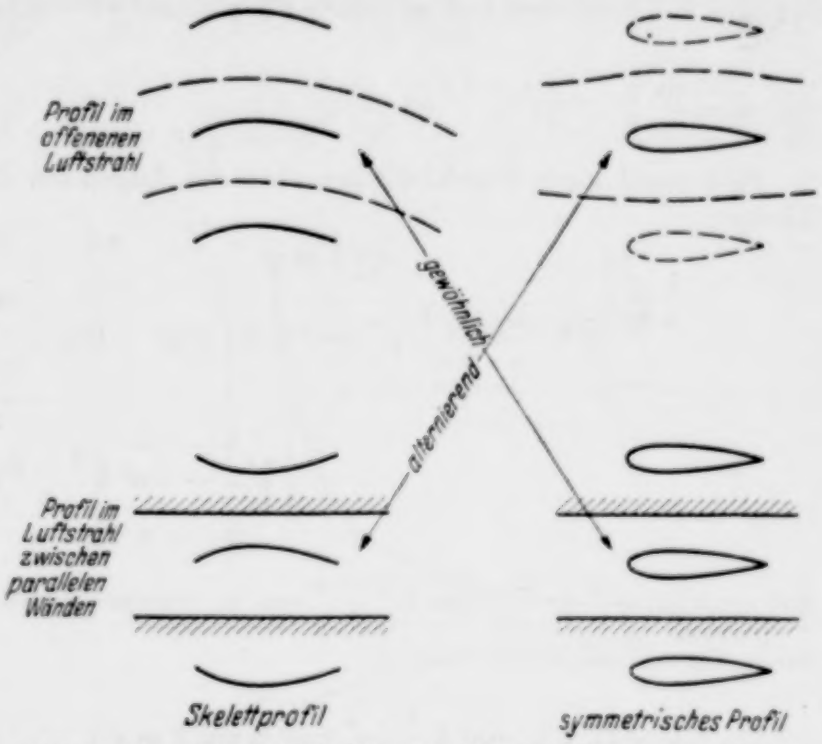

Abb. 3. Anwendungsbeispiele für gewöhnliches und alternierendes Gitter.

Die Hauptanwendung des alternierenden Gitters liegt im senkrechten Fall ($h_1 = 0$). In Abb. 3 sind die beiden Sonderfälle des symmetrischen und des Skelettprofils eingezeichnet, je einmal in gewöhnlicher und einmal in alternierender Gitteranordnung. Man kann diese beiden Fälle, wie skizziert, deuten als Profile im ebenen Kanal zwischen festen Wänden einerseits und (wenigstens in linearer Näherung) bei freier Strahloberfläche andererseits. In diesen Fällen stellt also die Gitteranordnung der Profile nichts anderes dar als einen Kunstgriff zur Erzeugung des gewünschten Strömungszustandes.

3. Der Fall $n = 1$. a) Die erste Hauptaufgabe. Der Hauptpunkt dieser Aufgabe ist die Berechnung des Integrals

$$\frac{k}{\pi}\,\oint_a^b \gamma(\xi)\,\operatorname{ctg} k\,(x-\xi)\,d\xi$$

bei bekannter Zirkulation $\gamma(\xi)$. Die Behandlung dieses Problems wird durch die folgenden Entwicklungsformeln sehr erleichtert. Für gewöhnliche Gitter gilt

$$\frac{k}{\pi}\,\oint_a^b \sqrt{\sin k\,(b-\xi)\sin k\,(\xi-a)}\,\sin^{2m-1} k\left(\xi-\frac{a+b}{2}\right)\left\{\begin{matrix}1\\ \sin k\left(\xi-\frac{a+b}{2}\right)\cos k\left(\xi-\frac{a+b}{2}\right)\end{matrix}\right\}\operatorname{ctg} k\,(x-\xi)\,d\xi$$

$$= -\sum_{\lambda=0}^{m}{}' q_{2\lambda}\,\sin^{2\lambda} k\,\frac{b-a}{2}\,\sin^{2m-2\lambda} k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left\{\begin{matrix}1\\ \sin k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\cos k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\end{matrix}\right\} \qquad \text{(5a)}$$

für $m = \left\{\begin{matrix}1, 2, \ldots\\ 0, 1, \ldots\end{matrix}\right\}$ mit den Konstanten $q_0 = -1$, $q_2 = 1/2$ und $q_{2\lambda} = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\lambda-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\lambda}$ für $\lambda > 1$ (vgl. I S. 110). Dabei sind die beiden Arten von Funktionen, die in der geschweiften

Klammer getrennt werden, je symmetrisch oder antimetrisch zum Mittelpunkt $\frac{1}{2}(a+b)$ der Strecke $< a, b >$.

Entsprechend findet man für alternierende Gitter

$$\frac{k}{\pi}\oint_a^b \sqrt{\sin k(b-\xi)\sin k(\xi-a)}\,\sin^{2m-1} k\left(\xi-\frac{a+b}{2}\right)\begin{Bmatrix}\sin k\left(\xi-\frac{a+b}{2}\right)\\ \cos k\left(\xi-\frac{a+b}{2}\right)\end{Bmatrix}\frac{d\xi}{\sin k(x-\xi)} = \\ = -\sum_{\lambda=0}^{m} q_{2\lambda}\sin^{2\lambda} k\frac{b-a}{2}\sin^{2m-2\lambda} k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\begin{Bmatrix}\sin k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\\ \cos k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\end{Bmatrix} \qquad (5b)$$

für $m = \begin{Bmatrix}0, 1, \ldots\\ 1, 2, \ldots\end{Bmatrix}$.

Manchmal noch zweckmäßiger sind die folgenden Entwicklungsformeln für gewöhnliche Gitter:

$$\frac{k}{\pi}\oint_a^b \begin{Bmatrix}\sin 2m\psi\\ \sqrt{1-\sin^2 k\frac{b-a}{2}\cos^2\psi}\,\sin(2m-1)\psi\end{Bmatrix}\operatorname{ctg} k(x-\xi)\,d\xi = \\ = \begin{Bmatrix}\cos 2m\varphi\\ \sqrt{1-\sin^2 k\frac{b-a}{2}\cos^2\varphi}\,\cos(2m-1)\varphi\end{Bmatrix} \qquad (6a)$$
$$(m = 1, 2, \ldots)$$

mit $\sin k\left(x-\frac{a+b}{2}\right) = \sin k\frac{b-a}{2}\cos\varphi$, entsprechend für ξ und ψ, sowie $0 \leqq \varphi, \psi \leqq \pi$; sowie für alternierende Gitter:

$$\frac{k}{\pi}\oint_a^b \begin{Bmatrix}\sqrt{1-\sin^2 k\frac{b-a}{2}\cos^2\psi}\,\sin 2m\psi\\ \sin(2m-1)\psi\end{Bmatrix}\frac{d\xi}{\sin k(x-\xi)} = \\ = \begin{Bmatrix}\sqrt{1-\sin^2 k\frac{b-a}{2}\cos^2\varphi}\,\cos 2m\varphi\\ \cos(2m-1)\varphi\end{Bmatrix} \qquad (6b)$$
$$(m = 1, 2, \ldots).$$

b) Die zweite Hauptaufgabe. Die folgenden Ableitungen gelten nur für die beiden Sonderfälle des senkrechten ($h_1 = 0$) und des waagrechten ($h_2 = 0$) Gitters, da die strenge Lösung der *Fredholm*schen Integralgleichung (2a) bei bekannter Funktion $\chi(x)$ bis heute nur für diese beiden Gitteranordnungen gelungen ist. Der Grund dafür liegt darin, daß nur für diese beiden Fälle die induzierten Zusatzgeschwindigkeiten $u + iv$ auf der Profilsehne $< a, b >$ reine Abwärtsgeschwindigkeiten werden, daß also gilt

$$u(x) = Re\left\{\frac{ik}{2\pi}\oint_a^b \gamma(\xi)\operatorname{ctg} k(x-\xi)\,d\xi\right\} = 0$$

für alle Zirkulationen $\gamma(\xi)$. Damit geht (2a) über in

$$u_\infty\left[\sin\alpha - \cos\alpha\,\frac{df(x)}{dx}\right] = \frac{k}{2\pi}\oint_a^b \gamma(\xi)\operatorname{ctg} k(x-\xi)\,d\xi\,, \qquad (2b)$$

wenn mit $f(x)$ die Ordinate des betrachteten Skelettprofils bezeichnet wird. Wegen der Linearität von (2b) läßt sich die zugehörige Lösung $\gamma(\xi)$ aufspalten in $\gamma(\xi) = \gamma_\alpha(\xi) + \gamma_0(\xi)$, wenn γ_α die Lösung von (2b) für $f'(x) \equiv 0$, γ_0 entsprechend für $\alpha = 0$ bedeutet. Für kleine Winkel α hängt der zweite Term fast nicht von α ab, so daß die Zirkulationsverteilung γ sich in

linearer Näherung also aus einem zu $\sin\alpha \approx \alpha$ proportionalen und einem anstellwinkelunabhängigen Glied zusammensetzt. Die Auflösung von (2b) ist [1] unter sehr allgemeinen Voraussetzungen möglich und die Lösung ist eindeutig bestimmt, wenn man noch die Abflußbedingung $\gamma(b) = 0$ fordert.

c) $f'(x) \equiv 0$ (Plattengitter). Man findet [1] aus (2b) die Zirkulationsverteilung

$$\gamma_\alpha(\xi) = \frac{2\,u_\infty \sin\alpha}{\cos k\,\dfrac{b-a}{2}} \sqrt{\frac{\sin k\,(b-\xi)}{\sin k\,(\xi-a)}}\,. \tag{7}$$

Nach der Formel von *Kutta-Joukowski* ist der zugehörige Auftrieb einer einzelnen Schaufel aus dem Gitterverband (ϱ = Luftdichte)

$$A_\alpha \equiv \varrho\,u_\infty \int_a^b \gamma_\alpha(\xi)\,d\xi = 2\pi \sin\alpha\,\frac{\varrho}{2}\,u_\infty^2\,(b-a)\,\frac{\operatorname{tg} k\,\dfrac{b-a}{2}}{k\,\dfrac{b-a}{2}}\,. \tag{8}$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich nur durch den Faktor

$$\varkappa = \frac{\operatorname{tg} k\,\dfrac{b-a}{2}}{k\,\dfrac{b-a}{2}}$$

von dem entsprechenden für ein Einzelprofil (Abb. 4). Das Moment um den Nullpunkt wird (vgl. I S. 119)

$$M_\alpha \equiv \varrho\,u_\infty \int_a^b \gamma_\alpha(\xi)\,\xi\,d\xi = A_\alpha\left[\frac{a+b}{2} + \frac{1}{k}\operatorname{ctg} k\,\frac{b-a}{2}\log\cos k\,\frac{b-a}{2}\right] \tag{9}$$

und also die Lage des Auftriebsmittelpunktes für γ_α, der mit dem Neutralpunkt x_N identisch ist

$$x_N \equiv \frac{M_\alpha}{A_\alpha} = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{k} \times \operatorname{ctg} k\,\frac{b-a}{2}\log\cos k\,\frac{b-a}{2}\,. \tag{10}$$

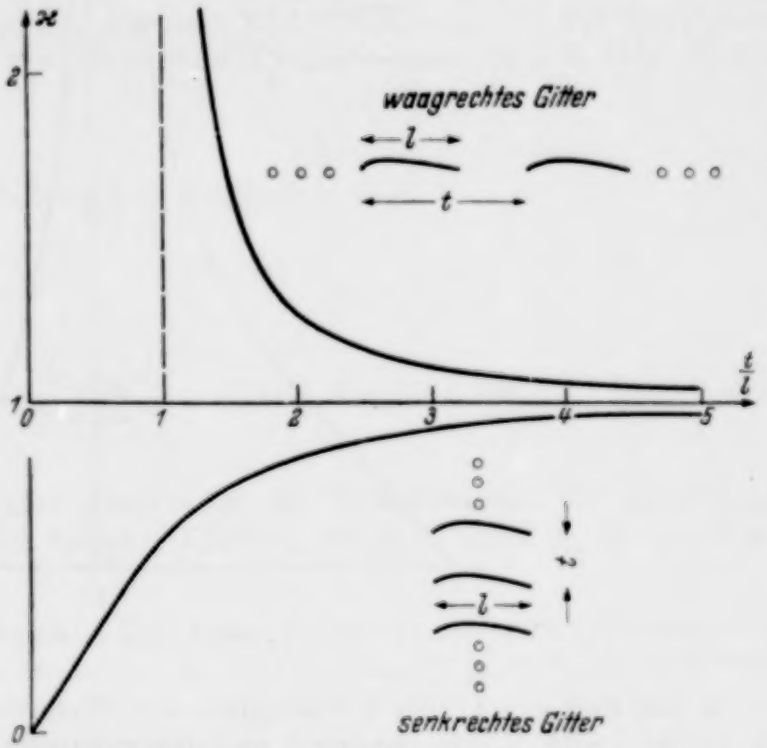

Abb. 4. Beeinflussung des Auftriebsanstiegs durch Gitteranordnung, Korrekturfaktor $\varkappa$.

In Abb. 5 ist x_N für $b - a = l$ in Abhängigkeit vom Teilungsverhältnis $t/l = |h|/(b-a)$ aufgetragen.

Die Gleichungen (7) bis (10) gelten für $f'(x) \equiv 0$, d. h. für ein Plattengitter. Da in diesem Falle (2) und (2b) übereinstimmen, sind die angegebenen Formeln nicht nur Näherungen als Lösungen einer linearen Theorie, sondern gelten e x a k t. Sie stehen also in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der konformen Abbildung [2].

d) $\alpha = 0$. Die Lösung der Integralgleichung (2b) wird hier zu

$$\gamma_0(\xi) = -\frac{2\,k\,u_\infty}{\pi}\sqrt{\frac{\sin k\,(b-\xi)}{\sin k\,(\xi-a)}}\oint_a^b \frac{df(x)}{dx}\left[\operatorname{ctg} k\,(x-\xi) + \operatorname{tg} k\,\frac{b-a}{2}\right]\sqrt{\frac{\sin k\,(x-a)}{\sin k\,(b-x)}}\,dx\,. \tag{11}$$

Dazu gehört der Nullauftrieb eines Einzelprofils

$$A_0 \equiv \varrho\,u_\infty \int_a^b \gamma_0(\xi)\,d\xi = -\frac{2\,\varrho\,u_\infty^2}{\cos k\,\dfrac{b-a}{2}} \int_a^b \frac{df(x)}{dx}\sqrt{\frac{\sin k\,(x-a)}{\sin k\,(b-x)}}\,dx\,, \tag{12}$$

[1] *K. Nickel*, Math. Z. 58 (1953), S. 49.

[2] Vgl. für (7) und (8) *R. Grammel*, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, S. 93—97. Braunschweig 1917.

und das Moment um den Nullpunkt beim Anstellwinkel $\alpha = 0$

$$M_0 = \varrho\, u_\infty \int_a^b \gamma_0(\xi)\, \xi\, d\xi = 2\,\varrho\, u_\infty^2 \int_a^b \frac{df(x)}{dx} \left[\frac{1}{k} \log \frac{\cos k\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \sqrt{\sin k\,(b-x) \sin k\,(x-a)}}{\cos k\,\frac{b-a}{2}} - \frac{a+b}{2\cos k\,\frac{b-a}{2}} \sqrt{\frac{\sin k\,(x-a)}{\sin k\,(b-x)}} \right] dx\,. \tag{13}$$

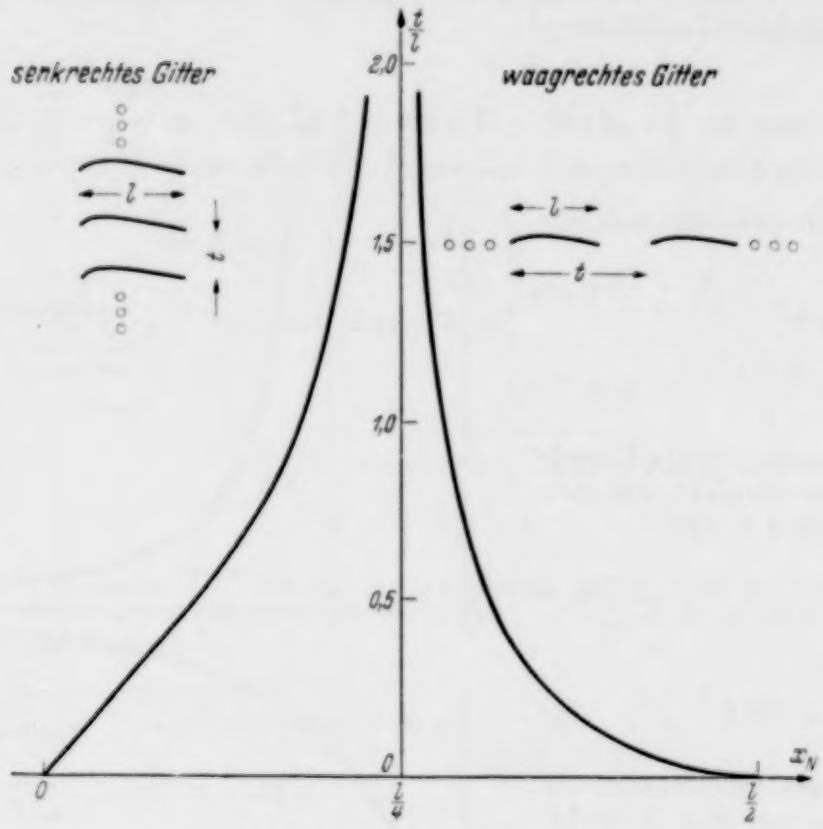

Abb. 5. Lage des Neutralpunktes.

4. Der Fall $n \geq 1$. Die n Profilgitter aus Skelettlinien mögen alle dieselbe Gitterkonstante $k = \pi/h = \pi/(h_1 + i\,h_2)$ besitzen und untereinander näherungsweise parallel verlaufen. Man ersetzt dieses System durch eine Wirbelbelegung auf den Profilsehnen, die o. B. d. A. alle parallel zur reellen Achse angenommen sind. Die Sehne eines beliebigen Profils des ν-ten Gitters möge sich von a_ν nach b_ν (mit $Im\ \{a_\nu\} = Im\ \{b_\nu\}$) erstrecken und sei so bestimmt, daß sie das Profilskelett nach Lage und Länge möglichst gut annähert (vgl. Abb. 6). Damit ersetzt sich die Bestimmungsgleichung (2a) durch das Gleichungssystem

Abb. 6. System aus n Profilgittern (ausgezogen). Ersatzsystem (gestrichelt): Wirbelbelegung γ auf den „Profilsehnen".

$$u_\infty \sin\left[\alpha - \chi_\mu(z_\mu)\right] = \cos\chi_\mu(z_\mu)\, Im \left\{ \frac{i\,k}{2\,\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\zeta_\nu)\, \operatorname{ctg} k\,(z_\mu - \zeta_\nu)\, d\zeta_\nu \right\} +$$

$$+ \sin\chi_\mu(z)\, Re \left\{ \frac{i\,k}{2\,\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\zeta_\nu)\, \operatorname{ctg} k\,(z_\mu - \zeta_\nu)\, d\zeta_\nu \right\}. \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{2c}$$

Dabei und im folgenden bezieht sich der Index μ immer auf den μ-ten Flügel, so daß z. B. $\gamma_\mu(z_\mu)$ die Zirkulation an der Stelle z_μ ist, die demnach zwischen a_μ und b_μ liegt. Der schwierigste Teil der ersten Hauptaufgabe besteht wieder in der Berechnung der Integralsumme

$$\sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\zeta_\nu) \operatorname{ctg} k\,(z_\mu - \zeta_\nu)\, d\zeta_\nu$$

bei bekannten Zirkulationen γ_ν. Wie in I S. 115/116 ausgeführt ist, lassen sich für die γ_ν Entwicklungsformeln angeben, die analog zu den Gleichungen (5a) und (5b) gebaut sind. Nur erfordern sie naturgemäß erheblich mehr Schreibarbeit, und da sich auch die Entwicklungskoeffizienten i. a. nicht geschlossen angeben lassen, soll hier auf eine Wiedergabe verzichtet und sofort die zweite Hauptaufgabe behandelt werden.

Wie im Falle $n = 1$ muß man auch hier k reell oder rein imaginär (Gitterfronten waagrecht bzw. senkrecht) vorschreiben. Darüber hinaus müssen aus der Menge aller solcher Gittersysteme noch diejenigen ausgesucht werden, bei denen die induzierten Geschwindigkeiten am Orte der Profilsehnen reine Abwindgeschwindigkeiten sind, da nur hierfür die strenge Lösung des Integralgleichungssystems (2c) bekannt ist. Das ist z. B. der Fall, wenn alle Profilkonturen hintereinander liegen, doch ist auch eine Staffelung um $h/2$ erlaubt (man vgl. I S. 114). Unter diesen Einschränkungen ist dann

$$Re\left\{\frac{i\,k}{2\,\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\zeta_\nu) \operatorname{ctg} k\,(z_\mu - \zeta_\nu)\, d\zeta_\nu\right\} = 0$$

und (2c) geht über in

$$u_\infty\left[\sin\alpha - \cos\alpha \frac{df_\mu(z_\mu)}{dz_\mu}\right] = \frac{k}{2\,\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\zeta_\nu) \operatorname{ctg} k\,(z_\mu - \zeta_\nu)\, d\zeta_\nu\,. \tag{2d}$$

Wie im Falle $n = 1$ läßt sich auch hier wieder für die Zirkulationen die Aufteilung $\gamma_\nu(\zeta_\nu) = \gamma_{\alpha\nu}(\zeta_\nu) + \gamma_{0\nu}(\zeta_\nu)$ vornehmen, wobei das erste Glied $\gamma_{\alpha\nu}$ für $f'_\mu \equiv 0$ und $\gamma_{0\nu}$ für $\alpha = 0$ erhalten wird.

b) $f'_\mu(z_\mu) \equiv 0$ (Systeme aus Plattengittern). Das Integralgleichungssystem (2d) hat, falls man die Abströmbedingung $\gamma_\nu(b_\nu) = 0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ voraussetzt, für $f'_\mu \equiv 0$ die eindeutige Auflösung [1]

$$\gamma_{\alpha\nu}(\zeta_\nu) = \frac{2\,u_\infty \sin\alpha}{\cos k \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2}} \sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{\sin k\,(b_\varkappa - \zeta_\nu)}{\sin k\,(a_\varkappa - \zeta_\nu)}} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)\,. \tag{14}$$

Dazu gehört der Gesamtauftrieb (Summe der Auftriebe von je einer Schaufel aus jedem Gitter des Systems)

$$A_\alpha \equiv \varrho\,u_\infty \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_{\alpha\nu}(\zeta_\nu)\, d\zeta_\nu = 2\,\pi \sin\alpha \frac{\varrho}{2}\, u_\infty^2 \sum_{\mu=1}^{n} (b_\mu - a_\mu) \frac{\operatorname{tg} k \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{b_\varrho - a_\varrho}{2}}{k \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\nu - a_\nu}{2}}\,. \tag{15}$$

Das Gesamt-Längsmoment

$$M_\alpha \equiv \varrho\,u_\infty \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_{\alpha\nu}(\zeta_\nu)\, \zeta_\nu\, d\zeta_\nu$$

läßt sich für $n > 1$ nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen darstellen. Ausdrücklich sei auch hier wieder bemerkt, daß diese Ergebnisse für die genannten Systeme aus Plattengittern exakte Gültigkeit besitzen.

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 107.

c) $\alpha = 0$. Die Auflösung von (2d) liefert für $\alpha = 0$

$$\gamma_{0\nu}(\zeta_\nu) = -\frac{2\,k\,u_\infty}{\pi}\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\frac{\sin k\,(b_\varkappa-\zeta_\nu)}{\sin k\,(a_\varkappa-\zeta_\nu)}}\sum_{\mu=1}^{n}\oint_{a_\mu}^{b_\mu}\frac{df_\mu(z_\mu)}{dz_\mu}\times$$

$$\times\left[\operatorname{ctg} k\,(z_\mu-\zeta_\nu)+\operatorname{tg} k\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{b_\varrho-a_\varrho}{2}\right]\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{\sin k\,(a_\lambda-z_\mu)}{\sin k\,(b_\lambda-z_\mu)}}\,dz_\mu \qquad (16)$$

für $\nu = 1, \ldots, n$.

Dazu gehört der Gesamtauftrieb

$$A_0 = \varrho\,u_\infty\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}\gamma_{0\nu}(\zeta_\nu)\,d\zeta_\nu = -\frac{2\,\varrho\,u_\infty^2}{\cos k\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{b_\varrho-a_\varrho}{2}}\sum_{\mu=1}^{n}\int_{a_\mu}^{b_\mu}\frac{df_\mu(z_\mu)}{dz_\mu}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{\sin k\,(a_\lambda-z_\mu)}{\sin k\,(b_\lambda-z_\mu)}}\,dz_\mu. \qquad (17)$$

Auch hier läßt sich das Gesamtmoment nicht geschlossen angeben.

d) F o l g e r u n g e n. Bezüglich der folgenden Aussagen vergleiche man mit [1], wo die entsprechenden Folgerungen für ein System aus n Einzelflügeln gezogen werden. Es sei hier noch einmal daran erinnert, daß an dieser Stelle nur waagrechte und senkrechte Profilgitter betrachtet werden, deren Schaufeln hintereinander oder (evtl. nur teilweise) „auf Lücke" stehen. Zur Vereinfachung der Schreibweise werde noch $\sin\alpha$ durch α und $\cos\alpha$ durch 1 ersetzt, man betrachtet also nur kleine Anstellwinkel α.

1. Auftriebsverteilung [2] $c_a(z) = 2\,\gamma(z)/u_\infty$, Gesamtauftrieb A und Moment M sind linear im Anstellwinkel α, es gilt also

$$c_a(z_\nu) = c_{a_0}(z_\nu) + \alpha\,\frac{dc_a(z_\nu)}{d\alpha},$$

$$A \equiv c_a\frac{\varrho}{2}u_\infty^2\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu-a_\nu) = \left(c_{a_0}+\alpha\,\frac{dc_a}{d\alpha}\right)\frac{\varrho}{2}u_\infty^2\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu-a_\nu),$$

$$M \equiv c_{m_0}\frac{\varrho}{2}u_\infty^2\left[\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu-a_\nu)\right]^2 = \left(c_{m_0}+\alpha\,\frac{dc_m}{d\alpha}\right)\frac{\varrho}{2}u_\infty^2\left[\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu-a_\nu)\right]^2.$$

2. Es gilt allgemein

$$\frac{dc_a(z_\nu)}{d\alpha} = \frac{4}{\cos k\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{b_\varrho-a_\varrho}{2}}\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\frac{\sin k\,(b_\varkappa-z_\nu)}{\sin k\,(a_\varkappa-z_\nu)}}.$$

3. Es gilt allgemein

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = 2\pi\,\frac{\operatorname{tg} k\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{b_\varrho-a_\varrho}{2}}{k\sum_{\nu=1}^{n}\frac{b_\nu-a_\nu}{2}} = 2\pi\cdot\varkappa,$$

vgl. Abb. 4, wenn man dort $l = b - a$ durch $\sum_{\varrho=1}^{n} b_\varrho - a_\varrho$ ersetzt. Der Auftriebsanstieg aller Gittersysteme mit gleicher Summe der Flügeltiefen ist also gleich.

4. Es gibt genau einen Profilneutralpunkt N (aerodynamic center), um den das Moment M anstellwinkelunabhängig wird, d. h.: bezogen auf N ist $dc_m/d\alpha = 0$. Für $n = 1$ ist die Abszisse z_N des Neutralpunkts

$$z_N = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{k}\operatorname{ctg} k\,\frac{b-a}{2}\log\cos k\,\frac{b-a}{2}$$

---

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 102.

[2] Die Verwendung von $c_a(z)$ zur Kennzeichnung der örtlichen Auftriebsdichte und von c_a als Beiwert des G e s a m t auftriebs wird kaum zu Mißverständnissen Anlaß geben. In der Theorie der tragenden Linie wird ebenfalls seit langem schon c_a als Beiwert des Gesamtauftriebs neben $c_a(y)$ als örtlichem Auftriebsbeiwert benutzt.

(Abb. 5), für $n > 1$ gibt es dafür keinen geschlossenen Ausdruck aus elementaren Funktionen, doch gilt dann wenigstens noch die Abschätzung $Re\{a_1\} \leqq Re\{z_N\} \leqq Re\{b_n\}$, d. h., der Neutralpunkt liegt immer innerhalb des Gittersystems. Andere, genauere Abschätzungen lassen sich leicht von Fall zu Fall gewinnen.

5. Für $f_\nu(z_\nu) \gtrless f_\nu(b_\nu)$ ist ebenfalls $c_{a_0} \gtrless 0$. Dabei tritt das Gleichheitszeichen bei c_{a_0} nur für $f_\nu(z_\nu) \equiv f_\nu(b_\nu)$ ein. Oder: verschiebt man alle Profile senkrecht so, daß $f_\nu(b_\nu) = 0$ ist für $\nu = 1, \ldots, n$ und legt man in Anblasrichtung [1] durch den hintersten Punkt b_n des Flügelsystems eine Gerade, so kann diese bei Gesamtauftrieb Null nie ausschließlich auf einer Seite des Systems liegen.

6. $n = 1$. Wenn sich die Tangente der Flügelkontur vom vordersten bis zum hintersten Punkt immer gleichsinnig weiterdreht, so ist $c_{m_0} \neq 0$ (c_{m_0} bezogen auf den Neutralpunkt). Oder: Druckpunktfestigkeit ohne Wendepunkt im Profil ist nicht möglich. — Ob dieselbe Aussage auch noch für $n > 1$ gilt, konnte der Verfasser nicht nachweisen.

7. Sonderfall der Streckenprofile mit demselben Anstellwinkel: Für diese ist $c_{a_0}(z_\nu) = c_{a_0} = c_{m_0} = 0$. Der Gesamtauftrieb ist bei allen Anstellwinkeln derselbe, wie wenn die einzelnen Flügel zu einem einzigen Flügel zusammengerückt wären; der Druckmittelpunkt liegt im Neutralpunkt. Bei senkrechten Plattengittern ($h_1 = 0$) besitzt die Strömung weit hinter ($+\infty$) bzw. weit vor ($-\infty$) dem Gitter die Komponenten

$$[U + iV]_{\pm\infty} = u_\infty \left[\cos\alpha + i \sin\alpha \left(1 \mp \mathfrak{Tg}\, \frac{\pi}{2} \frac{\sum_{\varrho=1}^{n} b_\varrho - a_\varrho}{h_2}\right)\right]. \tag{18}$$

Ein solches Gitter lenkt die ankommende Strömung also nie vollständig in die Waagrechte, die Richtung der Platten, um.

Die Beweise zu den ausgesprochenen Behauptungen ergeben sich entweder aus dem Vorangegangenen, oder können genau wie in meiner früheren Arbeit [2] geführt werden. Sie sollen deshalb hier nicht gebracht werden.

5. Anwendungsbeispiele. a) Spezielles Plattengitter aus zwei Profilen. Es sei $n = 2$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a_2 = 2 + i$, $b_2 = 5 + i$, $h = i\,h_2 = 2\,i$ (Abb. 7). Damit gilt nach (14) allgemein

$$c_a(x) = \frac{4 \sin\alpha}{\mathfrak{Cof}\,\pi} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}(1-x)\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}(5-x)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,x\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}(2-x)}} & \text{für } 0 \leqq x \leqq 1, \\ \sqrt{\dfrac{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}(x-1)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}(5-x)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\,x\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}(x-2)}} & \text{für } 2 \leqq x = z - i \leqq 5. \end{cases}$$

Siehe Abb. 7, wo zum Vergleich noch $c_a(x)$ für den einfachen Doppelflügel mit dem Streckenprofil $0 \leqq x \leqq 1$, $2 \leqq x \leqq 5$ eingezeichnet ist. Die Auftriebsdichte, die für das Doppelgitter schon an der Profilvorderkante erheblich unter der entsprechenden des Doppelflügels liegt, wird am Ende des Hinterprofils verschwindend klein, weil dort die Strömung durch das Vordergitter schon stark umgelenkt ist.

Nach 4 d) 3) ist weiter $c_a = 2\,\mathfrak{Tg}\,\pi \sin\alpha = 1{,}9925 \sin\alpha$.

Die Strömungskomponenten im Unendlichen vor und hinter dem Gitter sind nach (18)

$$[U + iV]_{\mp\infty} = u_\infty \left[\cos\alpha + \begin{Bmatrix} 1{,}9963 \\ 0{,}0037 \end{Bmatrix} i \sin\alpha\right].$$

Das bedeutet, daß dieses keineswegs besonders engstehende Doppelgitter die V-Komponente bis auf den kleinen Rest von nur $1{,}9\,‰$ (!) in die Waagrechte umlenkt.

b) Als Beispiel für die Anwendung der Formeln (6a) und (6b) werde für das senkrechte Gitter ($h_1 = 0$) die erste Hauptaufgabe für Skelettlinien gelöst. Das Ziel sei dabei die Gewinnung von Summenformeln, wie sie von *Truckenbrodt* [3] für das Einzelprofil aufgestellt wurden. Man geht dazu aus von Gleichung (2b), worin man offenbar $\alpha = 0$ setzen darf, da aus (7) die zusätzliche Lösung von (2b) für $\alpha \neq 0$ schon bekannt ist. Spaltet man in (2b) $\gamma(\xi)$ und $f(x)$ in

[1] D. h. in der Richtung, die durch $u_\infty(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ festgelegt ist.
[2] Siehe Fußnote 2 von S. 102.
[3] Siehe Fußnote 1 von S. 104.

ihre symmetrischen (γ^+, f^+) und antimetrischen (γ^-, f^-) Bestandteile auf und setzt noch

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{h_2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{b-a}{h_2}\cos\varphi \qquad (0\leqq\varphi\leqq\pi)\,, \tag{19}$$

so geht (2b) mit der Schreibweise $\gamma(x)=\gamma(\varphi), f(x)=f(\varphi), h_2=|h|=t, b-a=l$ über in

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi}=-\frac{l}{4\pi u_\infty}\sin\varphi\left[\oint_0^\pi\frac{\gamma^+(\psi)\,r(\psi)\sin\psi\,d\psi}{\cos\varphi-\cos\psi}+r(\varphi)\oint_0^\pi\frac{\gamma^-(\psi)\sin\psi\,d\psi}{\cos\varphi-\cos\psi}\right] \tag{20}$$

(man vgl. dazu I S. 111). Diese Formel stimmt, bis auf die Glieder

$$r(\varphi)=\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{l}{t}}{\frac{\pi}{2}\,\frac{l}{t}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\pi}{2}\,\frac{l}{t}\cos^2\varphi}} \tag{21}$$

überein mit der entsprechenden Formel für den Einzelflügel und geht für $t\to\infty$ mit $r(\varphi)\to 1$ auch in diese über. Durch die Koordinatentransformation (19) hat man also die gestellte Aufgabe, bis auf die Faktoren $r(\varphi)$ und $r(\psi)$ auf eine bekannte Gleichung zurückgeführt und kann die dafür entwickelten Methoden mitbenutzen. Etwas überraschend ist dabei am Anfang die Aufspaltung von γ in einen symmetrischen und einen antimetrischen Teil, da man eine solche Aufspaltung beim Einzelprofil nicht kennt. Sie rührt daher, daß sich diese beiden Teile bei der Transformation (19) verschieden verhalten und also auch getrennt behandelt werden müssen.

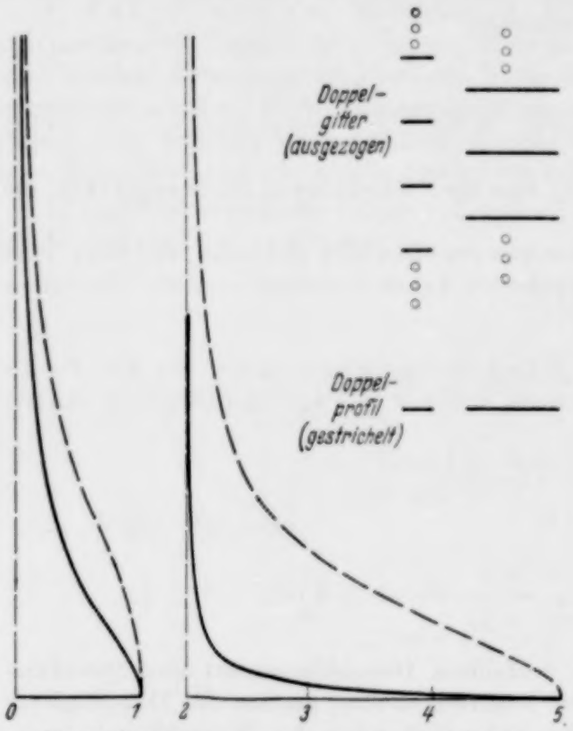

Abb. 7. Auftriebsverteilungen $c_a(x)$ eines senkrechten Doppelgitters aus Streckenprofilen und des entsprechenden Doppelprofils.

Mit der *Truckenbrodt*schen Bezeichnungsweise $y(x)=f(x), g(x)=\pm\gamma(x)/2\,u_\infty$ und den dort definierten Konstanten c_{mn} kommt man schließlich auf die Summenformel [1]

$$\dot{\bar{y}}_n=\sum_{m=1}^{N-1}c_{mn}\,g_m^+\,r_m+r_n\sum_{m=1}^{N-1}c_{mn}\,g_m^-\,.\ ^{[2]} \tag{22}$$

Dabei bedeutet $y_n=y(\varphi_n)$ mit $\varphi_n=\frac{\pi n}{N}$ und entsprechend $r_n=r(\varphi_n)$, $g_n=g(\varphi_n)$, die Ableitung nach φ bei $\bar{y}$ ist durch einen Punkt gekennzeichnet. Die Aufspaltung $g_m=g_m^+ + g_m^-$ geschieht nach der Vorschrift

$$g_m^+=g_{N-m}^+\,,\quad g_m^-=-g_{N-m}^-\,.$$

Der Zusammenhang mit x ist durch

$$y_n=y(x_n)\,,\quad g_n=g(x_n)$$

mit

$$x_n=\frac{a+b}{2}+\frac{t}{\pi}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left[\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{l}{t}\cos\frac{\pi n}{N}\right] \tag{23}$$

gegeben. In Tabelle 1 findet man x_n und r_n für $N=12$ und die drei Teilungsverhältnisse $t/l=1{,}0$; 0,75 und 0,5.

Für symmetrische Zirkulationsverteilungen, also $g=g^+$ läßt sich noch die Integration von $\dot{\bar{y}}$ geschlossen ausführen und liefert mit den *Truckenbrodt*schen Konstanten d_{mn}

$$\bar{y}_m^+=\sum_{m=1}^{N-1}d_{mn}\,g_m^+\,r_m\,. \tag{24}$$

Bei antimetrischen Zirkulationsverteilungen kann man y etwa durch graphische Integration der Funktionswerte aus Gleichung (22) erhalten.

[1] Der Einfachheit halber nur für durchweg endliche Geschwindigkeitsverteilungen angegeben.

[2] Die Überstreichung von y deutet darauf hin, daß $\bar{y}$ nicht exakt, sondern durch eine Summenformel berechnet wird.

Die (20) entsprechende Gleichung für alternierende Gitter lautet

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{l}{4\pi u_\infty} \sin\varphi \left[r(\varphi) \oint_0^\pi \frac{\gamma^+(\psi) \sin\psi \, d\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} + \oint_0^\pi \frac{\gamma^-(\psi)\, r(\psi) \sin\psi \, d\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} \right]. \tag{25}$$

Daraus folgen wieder die Summenformeln

$$\dot{\bar{y}}_n = r_n \sum_{m=1}^{N-1} c_{mn}\, g_m^+ + \sum_{m=1}^{N-1} c_{mn}\, g_m^-\, r_m \tag{26}$$

und

$$\bar{y}_n^- = \sum_{m=1}^{N-1} d_{mn}\, g_m^-\, r_m\,, \tag{27}$$

wobei die integrierte Gleichung (27) diesmal nur für antimetrische Zirkulationsverteilungen gültig ist.

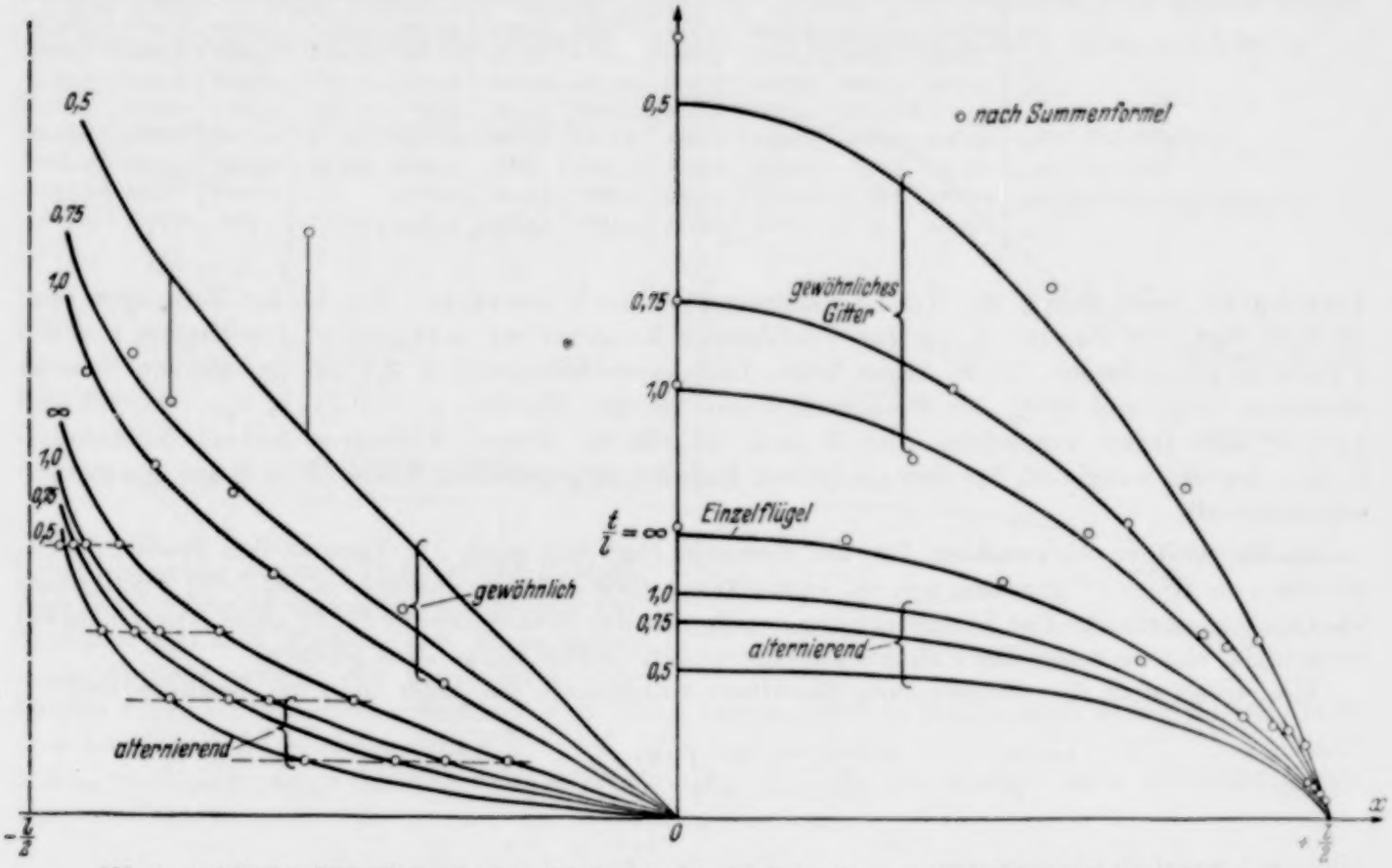

Abb. 8. $y(x)$ (rechte Bildhälfte) und $y'(x)$ (links) für konstante Zirkulationsverteilung bei verschiedenen Teilungen. $y(x)$ ist symmetrisch, $y'(x)$ antimetrisch in die andere Bildhälfte fortzusetzen.

Als Zahlenbeispiel sei der Fall $g_m = g_m^+ \equiv 1$ gewählt. Es ergeben sich für $a = 0$, $b = l$ (Profillänge), $h_2 = t$ (Gitterteilung)

$$y'(x) = \frac{1}{\pi} \log \frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{t}(l-x)}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{t}x} \quad \text{für gewöhnliche}$$

und

$$y'(x) = \frac{1}{\pi} \log \frac{\operatorname{Tg}\frac{\pi}{2t}(l-x)}{\operatorname{Tg}\frac{\pi}{2t}x} \quad \text{für alternierende}$$

Gitter. Für $t \to \infty$ streben diese beiden Ausdrücke gegen die bekannte Funktion

$$y'(x) = \frac{1}{\pi} \log \frac{l-x}{x}.$$

In Abb. 8 (rechte Hälfte) ist $y(x)$ aufgetragen. Die Übereinstimmung zwischen exakten Werten (Integration numerisch durchgeführt) und Summenformel ($N = 12$) ist zufriedenstellend, nur

im Falle $t/l = 0{,}5$ streuen die Werte in Profilmitte etwas stärker. Die Übereinstimmung bei y' (ebenfalls Abb. 8, linke Hälfte) mit der Summenformel ist für gewöhnliche Gitter nicht sehr gut. Bei alternierenden Gittern erhält man nach (25) die Kurve für y' exakt durch Verzerrung in x-Richtung nach (23), wie die Waagerechten durch die Punkte y'_n zeigen, da in dem speziellen Falle $g \equiv 1$ die Funktion $g(q)$ mit $g(x)$ übereinstimmt. Die Ungenauigkeiten der Summenformel für Einzelprofile ($t \to \infty$) werden hierbei durch die Gitteranordnung also nicht verstärkt.

Ein gewisser Nachteil der beschriebenen Methode soll nicht unerwähnt bleiben: schon bei Einzelprofilen ($t/l \to \infty$) stört für manche Zwecke die Tatsache, daß die Rechenpunkte x_n nicht äquidistant über die Profiltiefe verteilt sind, sondern sich am Vorder- und Hinterende häufen (Abb. 8 und Tabelle 1). Diese Eigenart, die auf die benutzte *Gauß*sche Quadratur

Tabelle 1. x_n und r_n, $N = 12$.

n		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t/l = \infty$	x_n	0,9830	0,9330	0,8536	0,7500	0,6294	0,5000	0,3706	0,2500	0,1464	0,0670	0,0170
	r_n	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$t/l = 1{,}00$	x_n	0,9899	0,9585	0,9021	0,8132	0,6799	0,5000	0,3201	0,1868	0,0979	0,0415	0,0101
	r_n	0,6011	0,6570	0,7671	0,9610	1,2587	1,4651	1,2587	0,9610	0,7671	0,6570	0,6011
$t/l = 0{,}75$	x_n	0,9920	0,9668	0,9208	0,8446	0,7163	0,5000	0,2837	0,1554	0,0792	0,0332	0,0080
	r_n	0,4785	0,5297	0,6366	0,8541	1,3266	1,9093	1,3266	0,8541	0,6366	0,5297	0,4785
$t/l = 0{,}50$	x_n	0,9945	0,9772	0,9451	0,8906	0,7889	0,5000	0,2111	0,1094	0,0549	0,0228	0,0055
	r_n	0,3282	0,3657	0,4468	0,6273	1,1662	3,6761	1,1662	0,6273	0,4468	0,3657	0,3282

zurückgeht, wird durch die Transformation (19) noch verstärkt. Für kleine Teilungen sind deshalb fast alle Punkte x_n an den Profilenden konzentriert, während in Profilmitte nur der Punkt x_6 übrig bleibt. Z. B. liegen beim Teilungsverhältnis $t/l = 0{,}5$ auf der ganzen Strecke zwischen 11% und 89% der Profiltiefe l nur die drei Punkte $x_7 = 0{,}2111$, $x_6 = 0{,}5000$ und $x_5 = 0{,}7889$ (man vergleiche Abb. 8 und Tabelle 1). Dieses Verhalten ist ein Schönheitsfehler, der als Ausgleich für den einfachen Bau der angegebenen Formeln in Kauf genommen werden muß.

c) Als weitere Anwendung für die Formeln (6a) soll noch die Theorie der Profiltropfen, wie sie von *Riegels* [1] gegeben wurde, vom Einzelprofil auf ein senkrechtes ($h_1 = 0$) Profilgitter übertragen werden[2]. Zur Vereinfachung werde nur das symmetrische Profil ohne Anstellwinkel behandelt, ebenso möge der Fall des alternierenden Gitters unerwähnt bleiben.

Überträgt man die *Riegels*schen Resultate sinngemäß, so findet man die Grundformel [3]

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \left[1 + \frac{k}{\pi} \oint_a^b \frac{dy}{d\xi} \operatorname{ctg} k\,(x - \xi)\, d\xi \right]$$

oder nach partieller Integration

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \left[1 + \frac{k}{\pi} \frac{d}{dx} \oint_a^b y(\xi) \operatorname{ctg} k\,(x - \xi)\, d\xi \right]. \tag{28}$$

Dabei ist $y(x)$ die Profilkontur und $u_\infty = V$ gesetzt, mit W bezeichnet *Riegels* die Strömungsgeschwindigkeit an der Körperkontur. Man kommt auf (28) also durch eine Quell-Senken-Belegung der Strecke $<a, b>$ mit der Stärke $dy(x)/dx$. Schon hier sei bemerkt, daß diese Annahme, die sich bei Einzelprofilen gut bewährt hat, bei Gitterprofilen zu Schwierigkeiten führt, sobald die Gitterschaufeln eng stehen.

Als Beispiel werde

$$y(x) = \varepsilon \frac{\sqrt{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{t}(b - x)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{t}(x - a)}}{e^2 + \mathfrak{Sin}^2\,\frac{\pi}{t}\left(x - \frac{a + b}{2}\right)}\, \mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{t}(b - x) \tag{29}$$

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 104.

[2] Zusatz bei der Korrektur: Dieselbe Aufgabe wird in einer inzwischen erschienenen Arbeit von *L. Speidel*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 295 behandelt.

[3] Man vgl. auch *Byrd* und *Huggins*, Fußnote 3 von S. 102.

gewählt. Man findet damit für W/V nach (28) den geschlossenen Ausdruck

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\left[1 + \frac{\pi\varepsilon}{c\,t}\frac{\sqrt{c^2 + \mathfrak{Sin}^2\frac{\pi}{2}\frac{l}{t}}}{\left[c^2 + \mathfrak{Sin}^2\frac{\pi}{t}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right]^2}\left\{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\frac{l}{t}\left[c^2 + (2c^2 - 1)\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\pi}{t}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. - c^2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\frac{l}{t}\,\mathfrak{Sin}\,2\,\frac{\pi}{t}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right\}\right]. \qquad (30)$$

In Abb. 9 ist diese Profilkontur mit der zugehörigen Geschwindigkeitsverteilung eingezeichnet für

$$\frac{t}{l} = \frac{h_2}{b-a} = 1, \quad c^2 = 2 \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{0.1}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\pi}{2}} = 0{,}018\,882\,.$$

Um wieder zu einer Summenformel zu gelangen, spaltet man $y(x)$ in einen symmetrischen (y^+) und einen antimetrischen Bestandteil (y^-) auf. Die Setzung (19) führt dann (28) über in

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{r^2(\varphi)\frac{l^2}{4}\sin^2\varphi + \dot{y}^2}}\left[r(\varphi)\,\frac{l}{2}\sin\varphi\right.$$
$$- \frac{1}{\pi}\frac{1}{r(\varphi)}\frac{d}{d\varphi}\oint_0^\pi \frac{y^+(\psi)\,r(\psi)\sin\psi\,d\psi}{\cos\varphi - \cos\psi}$$
$$- \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\varphi}\oint_0^\pi \frac{y^-(\psi)\sin\psi\,d\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} - \frac{\pi}{8}\frac{l^2}{t^2}\,r(\varphi)$$
$$\left.\times \sin 2\varphi \oint_0^\pi \frac{y^+(\psi)\,r(\psi)\sin\psi\,d\psi}{\cos\varphi - \cos\psi}\right]. \qquad (31)$$

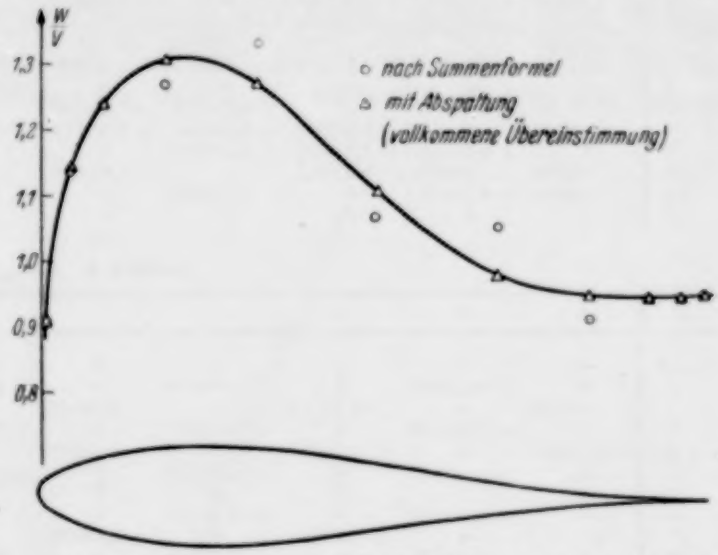

Abb. 9. Profilkontur und Geschwindigkeitsverteilung nach (29) und (30) für $t/l = 1$.

Beim Übergang zu einer *Fourier*reihe kommt man für die beiden ersten Integralglieder auf Summen mit den *Riegels*schen Konstanten A_{mn}. Anstatt jedoch die gegebene Profilkontur $y(x)$ in einen symmetrischen und einen antimetrischen Bestandteil aufzuspalten, ist es zweckmäßiger, diese Aufspaltung bei den A_{mn} vorzunehmen durch $A_{mn} = A^+_{mn} + A^-_{mn}$ mit $2\,A^+_{mn} = A_{mn} + A_{N-mn}$ und $2\,A^-_{mn} = A_{mn} - A_{N-mn}$. Damit findet man schließlich die Summenformel

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{c_n\,r_n^2 + \dot{y}_n^2}}\left[|a_n|\,r_n + \frac{1}{r_n}\sum_{m=1}^{N-1} A^+_{mn}\,2\,y_m r_m + \sum_{m=1}^{N-1} A^-_{mn}\,2\,y_m + \right.$$
$$\left. + \frac{l^2}{t^2}\,r_n \sum_{m=1}^{N-1} \Delta A_{mn}\,2\,y_m\,r_m\right]. \qquad (32)$$

Die Punkte n sind wieder dieselben wie in b), ebenso ist r_n von dort übernommen. $\dot{y}$ bedeutet wieder Ableitung nach φ, die Konstanten a_n und c_n sind dieselben wie bei *Riegels*. Die Koeffizienten A^+_{mn}, A^-_{mn} und ΔA_{mn} sind für $N = 12$ in den Tabellen 2 bis 4 zusammengestellt, ΔA_{mn} ist durch

$$\Delta A_{mn} = \pi^2\,\frac{\sin\frac{2\pi n}{N}}{32\,N}\,[1 - (-1)^{m+n}]\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi(m+n)}{N}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi(m-n)}{N}}\right] \qquad (33)$$

erklärt.

Als Anwendung dieser Summenformel wurde die Geschwindigkeitsverteilung W/V für das Beispiel der Profilkontur (29) bestimmt, sowie beim *Joukowski*profil 0015 die drei Teilungen $t/l = 1{,}0$; 0,75 und 0,5 mit $t/l = \infty$ (Einzelprofil) verglichen. Das Ergebnis zeigt Abb. 10. Wie man sieht, streuen die Punkte der Summenformel für die kleinste Teilung $t/l = 0{,}5$ in Profilmitte unzulässig stark. Ebenfalls eine große Abweichung findet man in Abb. 9. Der

Tabelle 2. A^{+}_{mn}, $N = 12$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	+ 1,50000	− 0,54197	0	− 0,04737	0	− 0,02312	0	− 0,04737	0	− 0,54197	+ 1,50000
2	− 0,54197	+ 1,50000	− 0,58933	0	− 0,07049	0	− 0,07049	0	− 0,58933	+ 1,50000	− 0,54197
3	0	− 0,58933	+ 1,50000	− 0,61245	0	− 0,11785	0	− 0,61245	+ 1,50000	− 0,58933	0
4	− 0,04737	0	− 0,61245	+ 1,50000	− 0,65982	0	− 0,65982	+ 1,50000	− 0,61245	0	− 0,04737
5	0	− 0,07049	0	− 0,65982	+ 1,50000	− 1,20178	+ 1,50000	− 0,65982	0	− 0,07049	0
6	− 0,02312	0	− 0,11785	0	− 1,20178	+ 3,00000	− 1,20178	0	− 0,11785	0	− 0,02312
7	0	− 0,07049	0	− 0,65982	+ 1,50000	− 1,20178	+ 1,50000	− 0,65982	0	− 0,07049	0
8	− 0,04737	0	− 0,61245	+ 1,50000	− 0,65982	0	− 0,65982	+ 1,50000	− 0,61245	0	− 0,04737
9	0	− 0,58933	+ 1,50000	− 0,61245	0	− 0,11785	0	− 0,61245	+ 1,50000	− 0,58933	0
10	− 0,54197	+ 1,50000	− 0,58933	0	− 0,07049	0	− 0,07049	0	− 0,58933	+ 1,50000	− 0,54197
11	+ 1,50000	− 0,54197	0	− 0,04737	0	− 0,02312	0	− 0,04737	0	− 0,54197	+ 1,50000
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 3. A^{-}_{mn}, $N = 12$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	+ 1,50000	− 0,53874	0	− 0,03867	0	0	0	+ 0,03867	0	+ 0,53874	− 1,50000
2	− 0,53874	+ 1,50000	− 0,57742	0	− 0,03867	0	+ 0,03867	0	+ 0,57742	− 1,50000	+ 0,53874
3	0	− 0,57742	+ 1,50000	− 0,57742	0	0	0	+ 0 ,57742	− 1,50000	+ 0,57742	0
4	− 0,03867	0	− 0,57742	+ 1,50000	− 0,53874	0	+ 0,53874	− 1,50000	+ 0,57742	0	+ 0,03867
5	0	− 0,03867	0	− 0,53874	+ 1,50000	0	− 1,50000	+ 0,53874	0	+ 0,03867	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	+ 0,03867	0	+ 0,53874	− 1,50000	0	+ 1,50000	− 0,53874	0	− 0,03867	0
8	+ 0,03867	0	+ 0,57742	− 1,50000	+ 0,53874	0	− 0,53874	+ 1,50000	− 0,57742	0	− 0,03867
9	0	+ 0,57742	− 1,50000	+ 0,57742	0	0	0	− 0,57742	+ 1,50000	− 0,57742	0
10	+ 0,53874	− 1,50000	+ 0,57742	0	+ 0,03867	0	− 0,03867	0	− 0,57742	+ 1,50000	− 0,53874
11	− 1,50000	+ 0,53874	0	+ 0,03867	0	0	0	− 0,03867	0	− 0,53874	+ 1,50000
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 4. ΔA_{mn}, $N = 12$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	+ 0,13563	0	+ 0,06296	0	+ 0,05322	0	+ 0,06296	0	+ 0,13565	0
2	− 0,10904	0	+ 0,21809	0	+ 0,10904	0	+ 0,10904	0	+ 0,21809	0	− 0,10904
3	0	− 0,14539	0	+ 0,25183	0	+ 0,14539	0	+ 0,25183	0	− 0,14539	0
4	− 0,01687	0	− 0,12591	0	+ 0,23496	0	+ 0,23496	0	− 0,12591	0	− 0,01687
5	0	− 0,00974	0	− 0,06296	0	+ 0,19861	0	− 0,06296	0	− 0,00974	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	− 0,00974	0	− 0,06296	0	+ 0,19861	0	− 0,06296	0	− 0,00974	0
8	− 0,01687	0	− 0,12591	0	+ 0,23496	0	+ 0,23496	0	− 0,12591	0	− 0,01687
9	0	− 0,14539	0	+ 0,25183	0	+ 0,14539	0	+ 0,25183	0	− 0,14539	0
10	− 0,10904	0	+ 0,21809	0	+ 0,10904	0	+ 0,10904	0	+ 0,21809	0	− 0,10904
11	0	+ 0,13565	0	+ 0,06296	0	+ 0,05322	0	+ 0,06296	0	+ 0,13565	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Grund dafür liegt darin, daß die Funktion $r(q)$ nach Gleichung (21) für $t/l \to 0$ bei $x = \frac{a+b}{2}$, also $q = \frac{\pi}{2}$ über alle Grenzen wächst und auch schon bei $t/l = 0{,}5$ dort eine starke Spitze hat (vgl. Tabelle 1). Diese Spitze überträgt sich auch auf die Funktion $y^{+}(q)\, r(q)$ und es ist verständlich, daß sich solch eine Funktion nicht mehr gut durch wenige Glieder einer *Fourier*reihe approximieren läßt. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, empfiehlt sich eine Abspaltung derart, daß man $y^{+}(q)$ durch eine symmetrische Funktion $e^{+}(q)$ annähert, für die sich das Integral in Formel (28) geschlossen berechnen läßt[1]. Die Annäherung braucht dabei aus dem oben erwähnten Grunde nur bei $x = \frac{1}{2}(a+b)$ gut zu sein. Damit kennt man W/V für diese Ersatzfunktion exakt (wenigstens im Rahmen der geschilderten Theorie) und braucht die Summenformel nur noch auf die Differenzfunktion $y - e^{+}$ anzuwenden.

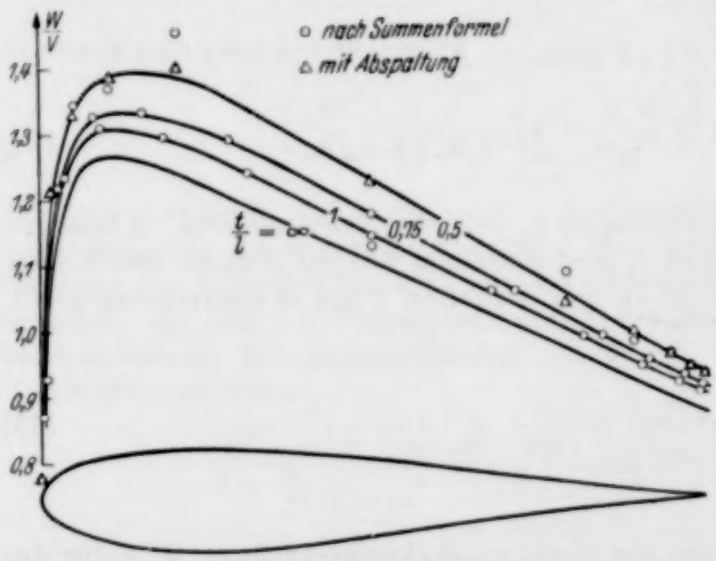

Abb. 10. *Joukowski*profil 0015 mit Geschwindigkeitsverteilung für vier verschiedene Teilungen.

[1] Eine solche Abspaltung läßt sich selbstverständlich auch bei den Skelettprofilen des Abschnitts b) durchführen, wobei etwa die angegebene Lösung für $g \equiv 1$ als Abspaltungsfunktion verwendet werden kann.

Die Punkte „mit Abspaltung" in Abb. 9 und 10 sind auf diese Weise gewonnen und zwar wurde

$$e^{+}(x) = \frac{d}{2} \frac{\mathfrak{Cof}\,\arccos \dfrac{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{t}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{l}{t}}}{\mathfrak{Cof}\,\arccos \dfrac{1}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{l}{t}}} \tag{34}$$

mit der Dicke $d = 2\,y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ gewählt. Dazu gehört nach I S. 114 eine konstante Zusatzgeschwindigkeit und man findet

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{+2}}}\left[1 + \frac{\pi}{2}\,\frac{d}{t}\,\frac{1}{\arccos \dfrac{1}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{l}{t}}}\right]. \tag{35}$$

Mit diesem Ergebnis lassen sich auch die Geschwindigkeitsverteilungen von Abb. 10 für das *Joukowski*profil 0015 in ihrem Verlauf verstehen. Nach (31) wird nämlich die antimetrische Geschwindigkeitsverteilung, die durch y^{-} erzeugt ist, durch die Gitteranordnung nur wenig

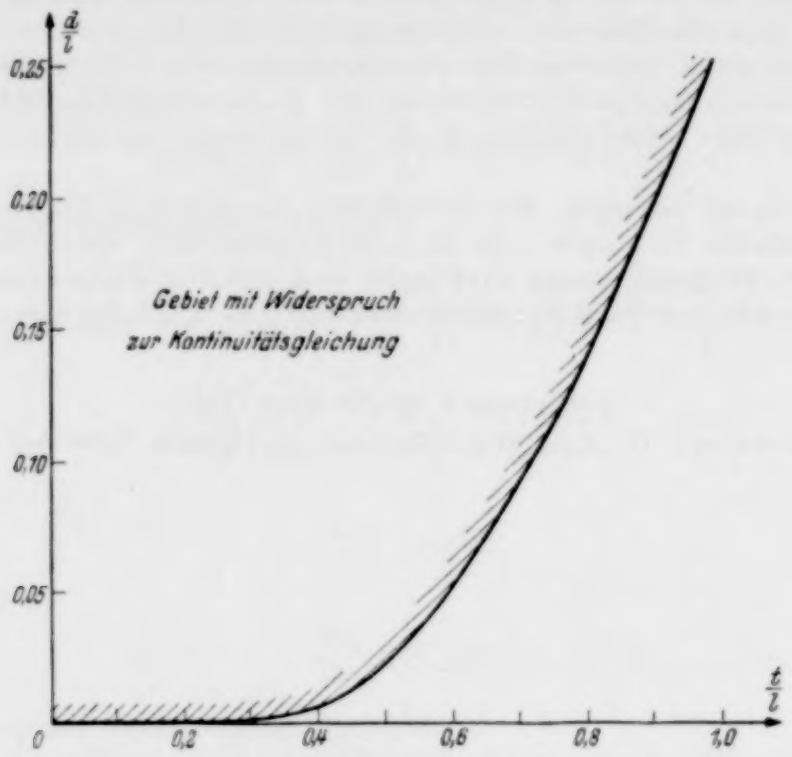

Abb. 11. Erklärung im Text.

geändert. Weiter wird y^{+} für nicht zu kleine Gitterteilungen durch e^{+} nach (34) sehr gut angenähert und die dazu gehörige symmetrische Geschwindigkeitsverteilung ist nach (35) $\left(\text{bis auf den Faktor } \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)$ konstant und gegenüber dem Einzelprofil um einen konstanten Wert vergrößert. Dies ist aber gerade der Sachverhalt von Abb. 10, wo die drei W/V-Kurven für $t/l < \infty$ im wesentlichen durch Parallelverschiebung aus der Kurve $t/l = \infty$ für das Einzelprofil hervorgehen.

d) Nun hat jedoch die in c) geschilderte Theorie für Profiltropfen in Gitteranordnung noch einen bedenklichen Mangel. Als lineare Theorie in $y(x)$ bestimmt sie eine Geschwindigkeit an der Körperoberfläche, die von dem unwesentlichen Faktor $\sqrt{1 + y'^2}$ abgesehen, nur proportional zur Profildicke d wächst. Dieses Verhalten steht aber in Widerspruch zur Wirklichkeit, da für $d/l \to t/l$, also bei verschwindender Breite der Schaufelkanäle, diese Geschwindigkeit aus Kontinuitätsgründen gegen Unendlich streben muß. Eine lineare Theorie kann also nur als Näherung für große Teilungen t/l angesehen werden und muß bei kleinen Teilungen not-

wendigerweise versagen. Zum Beweis, daß dieses Versagen bei den üblichen Profildicken d/l schon bei recht großen Teilungen t/l eintritt, werde die maximale Geschwindigkeit längs der Profilkontur mit der Kontinuitätsgleichung abgeschätzt. Zwar liegt der Anwendung der Kontinuitätsgleichung das Modell der eindimensionalen Strömung, der „Stromröhre", zugrunde, da jedoch eine Potentialströmung ihre Maximalgeschwindigkeit immer auf dem Rand annimmt, kann die höchste Umströmungsgeschwindigkeit $\frac{W}{V}\,\max$ eines Profils niemals kleiner sein als der Wert, den man nach der Kontinuitätsgleichung berechnet. Es gilt also für jedes senkrechte Flügelgitter der Teilung t aus symmetrischen Profilen mit der Dicke d und der Tiefe l die Ungleichung

$$\frac{W}{V}\,\max \geq \frac{1}{1-\frac{d}{l}\frac{l}{t}}. \tag{36}$$

Setzt man (35) in diese Ungleichung ein, so ergibt sich als Grenzkurve

$$\frac{d}{l} = \frac{\pi}{2}\frac{l}{t}\,\arcsin\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\frac{l}{t}} \tag{37}$$

(vgl. Abb. 11). Im ganzen Gebiet links von dieser Kurve steht die vorstehend geschilderte Theorie im Widerspruch zu der grundlegenden Kontinuitätsgleichung, zumindest für das spezielle Gitter aus den Profilen nach Gleichung (34). Sie kann also z. B. bei dem Dickenverhältnis $d/l = 0{,}15$ schon bei dem Teilungsverhältnis $t/l = 0{,}75$ keine sicheren Resultate mehr liefern. Die Geschwindigkeitsverteilung des *Joukowski*profils 0015 für $t/l = 0{,}5$ und $t/l = 0{,}75$ in Abb. 10 liegt schon jenseits dieser Gültigkeitsgrenze und besitzt damit nur noch Vergleichswert.

Der Grund für dieses Versagen der erweiterten *Riegels*schen Theorie ist offenbar darin zu suchen, daß für kleine Teilungen eine zu $y'(x)$ proportionale Quell-Senken-Verteilung die Wirklichkeit nicht mehr genau genug wiedergibt und daß hier die gegenseitige Beeinflussung der Gitterprofile schon in der Quell-Senken-Verteilung berücksichtigt werden müßte.

(Eingegangen am 29. März 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Karl Nickel*, Instituto Aeroteenico, Córdoba, Argentinien.

Ein graphisches Verfahren zur Lösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von W. Vogel.

Die Berechnung von Schwingungsvorgängen des Maschinenbaues und der Elektrotechnik erfordert häufig die Lösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Als Beispiele seien genannt die Einschwingvorgänge eines Schwingungsgebildes unter dem Einfluß einer veränderlichen äußeren Kraft und die Verzerrungen von nichtperiodischen Spannungsänderungen am Ausgang eines Vierpoles gegenüber dem Spannungsverlauf am Eingang (elektronische Meßgeräte).

Ist die Störfunktion als einfache mathematische Funktion darstellbar, dann kann in vielen Fällen mit einem mehr oder minder großen Aufwand an Rechenarbeit die Lösung gefunden werden. In der Praxis treten aber auch Differentialgleichungen auf, deren von den unabhängigen Variabeln abhängige Funktionen empirisch ermittelt worden sind. Die Funktionsverläufe sind dann fehlerbehaftet, und es genügt, für die Lösung der Differentialgleichung ein Näherungsverfahren anzuwenden. Das folgende graphische Näherungsverfahren gestattet, bei geringem Zeitaufwand in einem Zeichnungsgang die gesuchte Lösung zu finden, wenn für einen Wert der unabhängigen Variabeln die Randbedingungen vorgegeben sind.

Die Ausgangsgleichung sei:

$$f_1(x)\frac{d^2y}{dx^2} + f_2(x)\frac{dy}{dx} + y = g(x)\,. \tag{1}$$

Sie wird ersetzt durch die Differenzengleichung

$$g(x) = y + f_2(x)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x}\right) + f_1(x)\cdot\frac{\dfrac{\Delta y_2}{\Delta x} - \dfrac{\Delta y_1}{\Delta x}}{\Delta x} \tag{2}$$

oder

$$g(x) = y + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}\left(\frac{f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x)}{2}\right) - \frac{\Delta y_1}{\Delta x}\left(\frac{f_1(x)}{\Delta x} - \frac{f_2(x)}{2}\right).$$

Setzt man

$$a = \frac{f_1(x)}{\Delta x} - \frac{f_2(x)}{2}\,, \tag{3}$$

dann wird schließlich

$$g(x) = y + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}\left(a + f_2(x)\right) - \frac{\Delta y_1}{\Delta x}\,a\,. \tag{4}$$

Die graphische Lösung der Gleichung (4) zeigt Abb. 1.

Die praktische Durchführung des Verfahrens erfolgt zweckmäßig auf Millimeterpapier unter Zuhilfenahme einer Zeichenmaschine. Das Lineal wird entsprechend der Neigung 1 bis 2 (siehe Abb. 1) eingestellt und festgeklemmt. Mit dieser Neigung wird von Punkt 5 ausgehend eine Linie soweit gezogen, bis im Abstand a (3) der Punkt 6 gefunden ist. Nach Lösung der Klemmvorrichtung wird das Lineal derart geneigt, daß die Punkte 2 und 6 verbunden werden können. Von Punkt 2 bis 3 (Δx-Abstand) wird die Linie ausgezogen. In dieser Lage wird das Lineal im Zeichenmaschinenkopf festgeklemmt, da der so gefundene Neigungswinkel des Lineales zur Ausführung der Hilfskonstruktion des darauffolgenden Zeichenschritts benötigt wird. Durch Wiederholung des beschriebenen Verfahrens entsteht der gesuchte Kurvenzug.

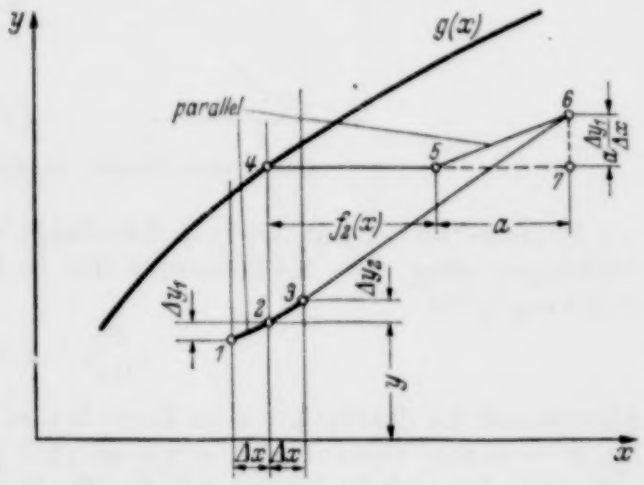

Abb. 1. Graphische Lösung der Differenzengleichung.

Der Verlauf von $f_2(x)$ und a kann unter oder über das Zeichenschaubild gezeichnet werden, damit für jeden Zeichenschritt die entsprechenden Werte leicht gefunden werden. In vielen Fällen ist es zweckmäßig, die Funktion $f_2(x)$ von vornherein von der Funktion g aus waagrecht aufzutragen.

Die Differenz Δx ist so klein zu wählen, daß sie weniger als $^1/_4$ bis $^1/_5$ der kleinsten auftretenden Werte von a und $f_2(x)$ beträgt, wenn größere Fehler vermieden werden sollen.

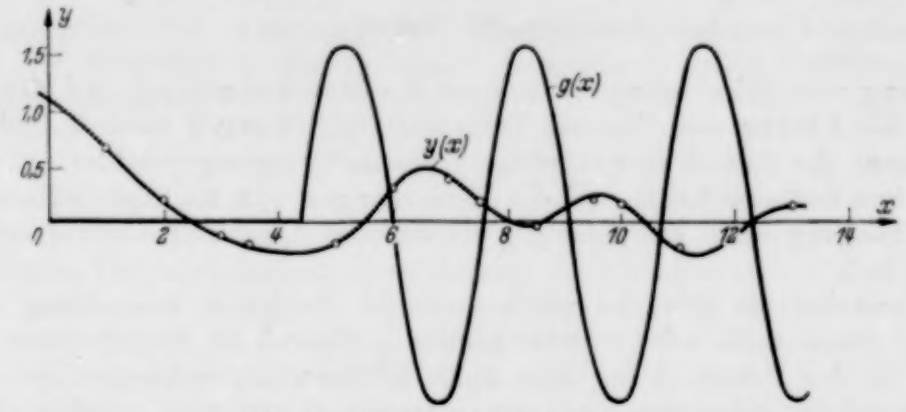

Abb. 2. Lösungsbeispiel: Einschwingvorgang.

Der Maßstab für die Funktionen a und $f_2(x)$ ist gleich dem Maßstab von x bzw. Δx auszuführen. Für die y-Koordinate darf der Maßstab beliebig gewählt werden; doch ist zu beachten, daß das Rechenblatt nach oben und unten genügend Raum für die Hilfskonstruktionen aufweist.

Um die zu erwartende Genauigkeit des Näherungsverfahrens zu zeigen, seien zwei Beispiele angeführt und mit der mathematischen Lösung verglichen. Für die Zahlenrechnungen wurde

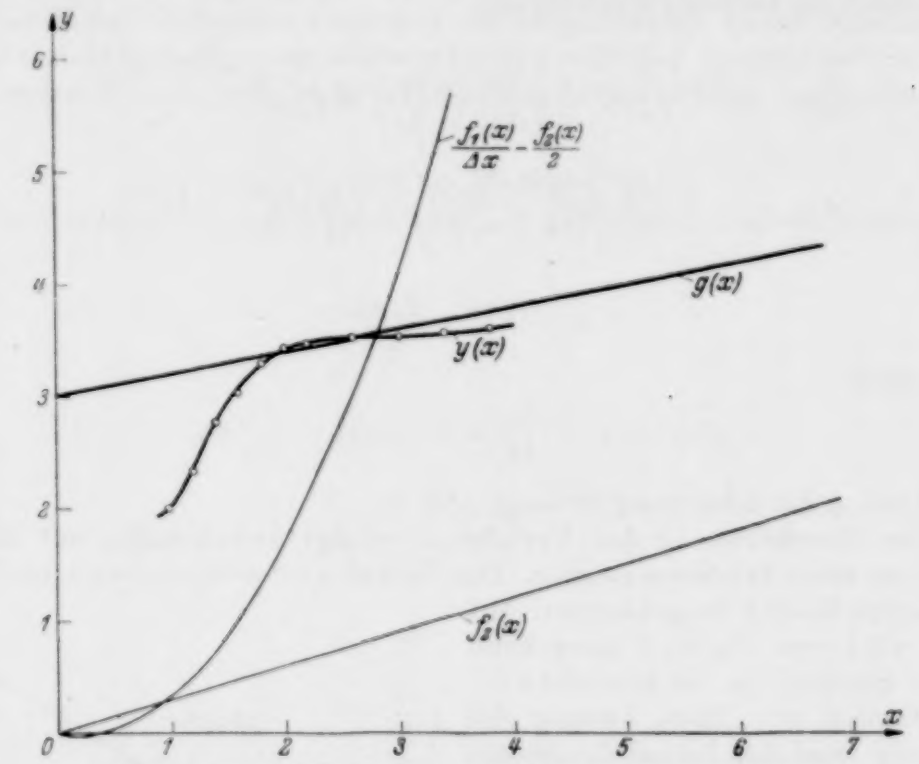

Abb. 3. Lösungsbeispiel: Gleichdimensionale lineare Differentialgleichung.

ein Rechenschieber mit 250 mm Basislänge verwendet. Das erste Beispiel betrifft einen Einschwingvorgang. Die Koeffizienten der Differentialgleichung seien konstant. Als Ausgangsgleichung gelte

$$2\,\frac{d^2y}{dx^2} + 1{,}3\,\frac{dy}{dx} + y = g(x)\,.$$

Hierbei soll die Störfunktion im Bereich $x = 0$ bis $x = 4{,}4$ den Wert 0 und im Bereich $x = 4{,}4$ bis $x \to \infty$ den Verlauf $g(x) = 1{,}6 \sin (2\,x - 8{,}8)$ haben. Die Randbedingungen für $x = 0$ seien $y = 1{,}1$ und $dy/dx = -0{,}3$; für den Beginn des zweiten Bereichs ergeben sie sich aus den

Werten y und dy/dx für $x = 4{,}4$ des ersten Bereiches. Die in Zahlen ausgedrückten Lösungen sind für den ersten Bereich:

$$y = e^{-0{,}325\,x}\,(1{,}1 \cos 0{,}628\,x + 0{,}901 \sin 0{,}628\,x)$$

und für den zweiten Bereich

$$y = -\,0{,}2145 \sin (2\,x - 8{,}444) - e^{-0{,}325\,x}\,(0{,}2376 \cos 0{,}628\,x + 2{,}43 \sin 0{,}628\,x)\,.$$

In Abb. 2 sind die durch das Näherungsverfahren gewonnene Kurve und einige durch Berechnung aus den vorstehenden Formeln gefundene Werte als Punkte eingetragen.

Das zweite Beispiel (Abb. 3) stellt einen Vergleich zwischen der Näherungslösung und der mathematischen Lösung einer gleichdimensionalen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung dar.

Die Ausgangsgleichung lautet

$$0{,}05\,x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 0{,}3\,x \frac{dy}{dx} + y = 3 + 0{,}2\,x\,.$$

Werden als Randbedingungen für $x = 1$ die Werte $y = 2$ und $dy/dx = 0{,}5$ gewählt, so ist die Lösung

$$y = 3 + 0{,}154\,x - x^{-2{,}5} \cdot [1{,}154 \cos (\ln x^{3{,}708}) + 0{,}685 \sin (\ln x^{3{,}708})]\,.$$

Der Verlauf von $f_2(x) = 0{,}3\,x$ und $a = \dfrac{0{,}05\,x^2}{\Delta x} - \dfrac{0{,}3\,x}{2}$ ist in Abb. 3 eingetragen.

Aus den beiden Beispielen ist zu ersehen, daß die Näherungslösung mit den mathematisch ermittelten Werten gut übereinstimmt.

Das Verfahren ist bei der Lösung von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung selbstverständlich ebenfalls anwendbar. Außerdem sei darauf hingewiesen, daß dieses graphische Näherungsverfahren nicht nur dann erfolgreich angewandt werden kann, wenn die veränderlichen Koeffizienten und die Störfunktion durch empirische Verfahren gewonnen wurden, sondern auch wenn die exakte mathematische Lösung einer Gleichung nur mit großem Rechenaufwand zu finden ist.

(Eingegangen am 13. April 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Wilhelm Vogel*, Augsburg, Schillstr. 91.

Der ebene Verzerrungszustand des dickwandigen Rohres bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz.

Von F. Jindra.

1. Einleitung. Es handelt sich hier um die Berechnung der Spannungsverteilung in einem dickwandigem Rohr unter gleichmäßigem Innen- und Außendruck. Die elastischen Eigenschaften des homogenen, isotropen Werkstoffs werden durch einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen beschrieben. Das nichtlineare Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen kann allgemein in der folgenden Form geschrieben werden [1]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_x - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_y &= 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_y - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_z &= 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_z - \varepsilon_0)\,, \\ \tau_{xy} &= G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{xy},\quad \tau_{yz} = G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{yz},\quad \tau_{zx} = G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{zx}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei, bezogen auf ein rechtwinkliges (x, y, z)-Koordinatensystem, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ die Spannungskomponenten, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \psi_{xy}, \psi_{yz}, \psi_{zx}$ die Verzerrungskomponenten, K und G den Kompressionsmodul und den Schubmodul, ε_0 und ψ_0^2 die invarianten Verzerrungsgrößen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \\ \psi_0^2 &= \frac{2}{3}\left\{2\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_0)^2\right] + \psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2\right\} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

bedeuten. Die Dehnungsfunktion $\varkappa(\varepsilon_0)$ und die Scherungsfunktion $\gamma(\psi_0^2)$, die experimentell zu ermitteln sind, nehmen als Potenzreihen von ε_0 und ψ_0^2 die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa(\varepsilon_0) &= 1 + \varkappa_1\,\varepsilon_0 + \varkappa_2\,\varepsilon_0^2 + \varkappa_3\,\varepsilon_0^3 + \cdots, \\ \gamma(\psi_0^2) &= 1 + \gamma_2\,\psi_0^2 + \gamma_4\,\psi_0^4 + \gamma_6\,\psi_0^6 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Im folgenden geben wir zuerst allgemein die Differentialgleichung für die radiale Verschiebung an (Ziff. 2). Beschränken wir uns auf bestimmte einfache Formen der Funktionen (3), so wird die Weiterbehandlung der aufgestellten Differentialgleichung durch Reihenentwicklung (Ziff. 3) und durch sukzessive Näherung (Ziff. 4) ermöglicht. Die Zahlenrechnungen ergeben, daß eine geringfügige Abweichung des Elastizitätsgesetzes von der Linearität eine recht erhebliche Verminderung des Wertes der Tangentialspannung am Innenrand verursacht. Die vorliegende Untersuchung kann somit als ein weiterer Beitrag zur Erklärung des Abbaues der Spannungsspitzen angesehen werden.

2. Die Differentialgleichung für die radiale Verschiebung. Wir betrachten einen Körper von der Gestalt eines rotationssymmetrischen Hohlzylinders, der unter gleichmäßiger Belastung durch Innen- und Außendruck steht. Das Koordinatensystem legen wir so, daß die z-Achse mit der Zylinderachse zusammenfällt. Wir setzen einen ebenen Verzerrungszustand voraus [2]. Man spricht von einem ebenen Verzerrungszustand, wenn die Verschiebung in der z-Richtung verschwindet:

$$\varepsilon_z = 0\,. \tag{4}$$

Dieses Ebenbleiben der Querschnitte muß durch eine an den Stirnflächen des Zylinders gleichzeitig auftretende Längsspannung σ_z erzwungen werden. Das Problem hängt somit nur vom Radius r ab. Wie das Kräftegleichgewicht an einem aus der Zylinderwand herausgeschnittenen Element im Abstand r vom Mittelpunkt (Abb. 1) zeigt, gilt zwischen Radialspannung σ_r und Tangentialspannung σ_φ die folgende Beziehung:

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + r\,\frac{d\sigma_r}{dr}\,. \tag{5}$$

[1] *H. Kauderer*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 450; *F. Jindra*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 121.

[2] Der praktisch wichtigere Fall des ebenen Spannungszustandes im dickwandigen Rohr bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz ist von mir bereits behandelt worden. Die Arbeit erscheint demnächst in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 6 (1955).

Bezeichnet u die radiale Verschiebung, so ist die Formänderung vollständig durch die Dehnungen in radialer und tangentialer Richtung

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \qquad \varepsilon_r = \frac{u}{r} \tag{6}$$

gegeben. Dann wird nach (2) mit (4) und (6)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) = \frac{1}{3}\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right), \\ \psi_0^2 &= \frac{8}{9}(\varepsilon_r^2 - \varepsilon_r \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\varphi^2) = \frac{8}{9}\left[\left(\frac{du}{dr}\right)^2 - \frac{u}{r}\frac{du}{dr} + \left(\frac{u}{r}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Mit Hilfe der Spannungs-Dehnungsgleichungen (1) kann man die Spannungen durch die Dehnungen ausdrücken und erhält mit (7)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= K\varkappa(\varepsilon_0)\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) + \frac{2}{3}G\gamma(\psi_0^2)\left(2\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right), \\ \sigma_\varphi &= K\varkappa(\varepsilon_0)\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) - \frac{2}{3}G\gamma(\psi_0^2)\left(\frac{du}{dr} - 2\frac{u}{r}\right), \\ \sigma_z &= K\varkappa(\varepsilon_0)\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) - \frac{2}{3}G\gamma(\psi_0^2)\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

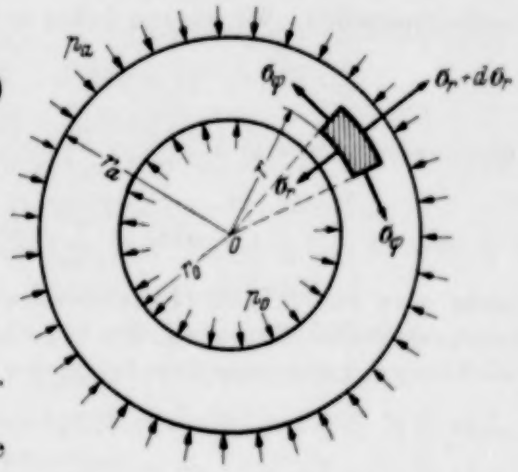

Abb. 1. Das dickwandige Rohr.

Man geht mit den Ausdrücken (8) in (5) ein und findet

$$3K\frac{d}{dr}\left[\varkappa(\varepsilon_0)\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right)\right] + 2G\frac{d}{dr}\left[\gamma(\psi_0^2)\left(2\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)\right] + 6G\gamma(\psi_0^2)\frac{1}{r}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) = 0.$$

Setzt man schließlich noch für die bezogene radiale Verschiebung

$$z = \frac{u}{r}, \tag{9}$$

so folgt für $z(r)$ die Differentialgleichung

$$3K\frac{d}{dr}\left[\varkappa(\varepsilon_0)\left(r\frac{dz}{dr} + 2z\right)\right] + 2G\frac{d}{dr}\left[\gamma(\psi_0^2)\left(2r\frac{dz}{dr} + z\right)\right] + 6G\gamma(\psi_0^2)\frac{dz}{dr} = 0 \tag{10}$$

mit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\left(r\frac{dz}{dr} + 2z\right), \qquad \psi_0^2 = \frac{8}{9}\left[r^2\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + rz\frac{dz}{dr} + z^2\right]. \tag{10a}$$

Bezeichnet man mit r_a und r_0 den äußeren und den inneren Halbmesser, mit p_a und p_0 den Außen- und den Innendruck, so sind die Randbedingungen an den beiden Mantelflächen des Zylinders:

$$(\sigma_r)_{r=r_a} = -p_a, \qquad (\sigma_r)_{r=r_0} = -p_0. \tag{11}$$

Die Lösung der nichtlinearen Randwertaufgabe (10) mit (11) stößt bei willkürlich vorgegebenen Dehnungs- und Scherungsfunktionen auf unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten. Wir beschränken uns von jetzt an auf solche Werkstoffe, bei den die Funktionen (3) in der Form

$$\varkappa(\varepsilon_0) = 1, \qquad \gamma(\psi_0^2) = 1 + \gamma_2\psi_0^2 \tag{12}$$

darstellbar sind. Dies ist für viele metallische Werkstoffe der Fall [1]. Dann vereinfacht sich die Differentialgleichung (10) für die bezogene radiale Verschiebung zu

$$\left[2ar^2\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + 2arz\frac{dz}{dr} + az^2 + 1\right]r\frac{d^2z}{dr^2} + \left[4ar^2\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + 5arz\frac{dz}{dr} + 3az^2 + 3\right]\frac{dz}{dr} = 0, \tag{13}$$

wobei zur Abkürzung die (negative) Stoffzahl

$$a = \frac{16\gamma_2 G}{3(3K + 4G)} \tag{14}$$

[1] Vgl. *H. Kauderer*, a. a. O. S. 468.

eingeführt wird, die hier allein die Abweichung vom *Hooke*schen Gesetz kennzeichnet. Mit der Annahme (12) und wegen (9) nehmen die Spannungskomponenten (8) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= K\left(2z + r\frac{dz}{dr}\right) + \frac{2}{3}G\left(z + 2r\frac{dz}{dr}\right) + \frac{1}{9}(3K + 4G)\,a\left[\left(z + r\frac{dz}{dr}\right)^3 + r^3\left(\frac{dz}{dr}\right)^3\right],\\
\sigma_\varphi &= K\left(2z + r\frac{dz}{dr}\right) + \frac{2}{3}G\left(z - r\frac{dz}{dr}\right) + \frac{1}{9}(3K + 4G)\,a\left[z^3 - r^3\left(\frac{dz}{dr}\right)^3\right],\\
\sigma_z &= \frac{1}{3}(3K - 2G)\left(2z + r\frac{dz}{dr}\right) - \frac{1}{9}(3K + 4G)\,a\left[z^3 + \left(z + r\frac{dz}{dr}\right)^3\right].
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

3. Lösung durch Reihenentwicklung. Die Differentialgleichung (13) läßt sich durch geeignete Transformationen in eine *Abel*sche Differentialgleichung zweiter Art überführen. Da trotzdem die Gleichung nicht geschlossen gelöst werden konnte, suchen wir die Lösung in Gestalt einer Reihenentwicklung.

Wir wollen die Integralkurve von (13) in der Umgebung der Stelle $r = r_a$ durch eine Potenzreihe darstellen. Wir setzen daher in (13)

$$s = 1 - \frac{r}{r_a} \tag{16}$$

und machen für $z(r) = \bar{z}\left(1 - \frac{r}{r_a}\right) = \bar{z}(s)$ den Ansatz

$$\bar{z}(s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu s^\mu = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \cdots. \tag{17}$$

Geht man mit (17) in (13) ein, entwickelt nach Potenzen von s und vergleicht die Faktoren entsprechender Potenzen von s, so bestimmen sich die Koeffizienten c_μ der Potenzreihenentwicklung rekursiv aus dem folgenden Gleichungssystem:

$$2\,[a\,(2c_1^2 - 2c_1c_0 + c_0^2) + 1]\,c_2 - a\,(4c_1^2 - 5c_1c_0 + 3c_0^2)\,c_1 - 3c_1 = 0\,, \tag{18a}$$

$$\begin{aligned}
&6\,[a\,(2c_1^2 - 2c_1c_0 + c_0^2) + 1]\,c_3 + 2a\,(8c_2c_1 - 4c_2c_0 - 20c_1^2 + 16c_1c_0 - 4c_0^2)\,c_2 - 8c_2\\
&\quad + a\,(13c_1 - 11c_0)\,c_1^2 = 0\,,
\end{aligned} \tag{18b}$$

$$\begin{aligned}
&12\,[a\,(2c_1^2 - 2c_1c_0 + c_0^2) + 1]\,c_4 + 3a\,(24c_2c_1 - 12c_2c_0 - 28c_1^2 + 22c_1c_0 - 5c_0^2)\,c_3 - 15c_3\\
&\quad + a\,(16c_2^2 - 108c_2c_1 + 40c_2c_0 + 95c_1^2 - 46c_1c_0)\,c_2 - 12a\,c_1^3 = 0\,,
\end{aligned} \tag{18c}$$

$$\begin{aligned}
&20\,[a\,(2c_1^2 - 2c_1c_0 + c_0^2) + 1]\,c_5 + 4a\,(32c_2c_1 - 16c_2c_0 - 36c_1^2 + 28c_1c_0 - 6c_0^2)\,c_4 - 24c_4\\
&\quad + a\,(72c_3c_1 - 36c_3c_0 + 96c_2^2 - 412c_2c_1 + 148c_2c_0 + 173c_1^2 - 78c_1c_0)\,c_3\\
&\quad - a\,(88c_2^2 - 212c_2c_1 + 44c_2c_0 + 71c_1^2)\,c_2 = 0\,,
\end{aligned} \tag{18d}$$

$$\begin{aligned}
&30\,[a\,(2c_1^2 - 2c_1c_0 + c_0^2) + 1]\,c_6 + 5a\,(40c_2c_1 - 20c_2c_0 - 44c_1^2 + 34c_1c_0 - 7c_0^2)\,c_5 - 35c_5\\
&\quad + a\,(240c_3c_1 - 120c_3c_0 + 160c_2^2 - 668c_2c_1 + 236c_2c_0 + 273c_1^2 - 118c_1c_0)\,c_4\\
&\quad + a\,(180c_3c_2 - 372c_3c_1 + 129c_3c_0 - 476c_2^2 + 734c_2c_1 - 142c_2c_0 - 116c_1^2)\,c_3\\
&\quad + 15a\,(10c_2 - 9c_1)\,c_2^2 = 0\,,
\end{aligned} \tag{18e}$$

$$\begin{aligned}
&42\,[a\,(2c_1^2 - 2c_1c_0 + c_0^2) + 1]\,c_7 + 6a\,(48c_2c_1 - 24c_2c_0 - 52c_1^2 + 40c_1c_0 - 8c_0^2)\,c_6 - 48c_6\\
&\quad + a\,(360c_3c_1 - 180c_3c_0 + 240c_2^2 - 984c_2c_1 + 344c_2c_0 + 395c_1^2 - 166c_1c_0)\,c_5\\
&\quad + a\,(192c_4c_1 - 96c_4c_0 + 576c_3c_2 - 1164c_3c_1 + 396c_3c_0 - 744c_2^2 + 1120c_2c_1\\
&\quad - 208c_2c_0 - 171c_1^2)\,c_4 + a\,(108c_3^2 - 828c_3c_2 + 615c_3c_1 - 111c_3c_0 + 754c_2^2\\
&\quad - 430c_2c_1)\,c_3 - 84a\,c_2^3 = 0\,,
\end{aligned} \tag{18f}$$

$$\begin{aligned}
&56\,[a\,(2c_1^2 - 2c_1c_0 + c_0^2) + 1]\,c_8 + 7a\,(56c_2c_1 - 28c_2c_0 - 60c_1^2 + 46c_1c_0 - 9c_0^2)\,c_7 - 63c_7\\
&\quad + a\,(504c_3c_1 - 252c_3c_0 + 336c_2^2 - 1360c_2c_1 + 472c_2c_0 + 539c_1^2 - 222c_1c_0)\,c_6\\
&\quad + a\,(560c_4c_1 - 280c_4c_0 + 840c_3c_2 - 1672c_3c_1 + 562c_3c_0 - 1068c_2^2 + 1582c_2c_1\\
&\quad - 286c_2c_0 - 236c_1^2)\,c_5 + a\,(448c_4c_2 - 888c_4c_1 + 296c_4c_0 + 504c_3^2 - 2524c_3c_2\\
&\quad + 1834c_3c_1 - 318c_3c_0 + 1124c_2^2 - 622c_2c_1)\,c_4 - a\,(468c_3^2 - 1235c_3c_2 + 336c_3c_1\\
&\quad + 395c_2^2)\,c_3 = 0\,,
\end{aligned} \tag{18g}$$

usw. Die Auflösung dieser Gleichung ergibt

$$c_2 = \frac{c_1}{2N}[a\,(4c_1^2 - 5c_1c_0 + 3c_0^2) + 3]\,, \tag{19a}$$

$$c_3 = \frac{c_1}{6\,N^3}\,[a^3\,(44\,c_1^6 - 148\,c_1^5 c_0 + 252\,c_1^4\,c_0^2 - 254\,c_1^3\,c_0^3 + 163\,c_1^2\,c_0^4 - 63\,c_1\,c_0^5 + 12\,c_0^6) + a^2\,(84\,c_1^4 - 188\,c_1^3\,c_0 + 214\,c_1^2\,c_0^2 - 126\,c_1\,c_0^3 + 36\,c_0^4) + a\,(51\,c_1^2 - 63\,c_1\,c_0 + 36\,c_0^2) + 12]\,. \tag{19b}$$

$$c_4 = \frac{c_1}{24\,N^5}\,[a^5\,(640\,c_1^{10} - 3432\,c_1^9\,c_0 + 9352\,c_1^8\,c_0^2 - 16412\,c_1^7\,c_0^3 + 20\,352\,c_1^6\,c_0^4 - 18562\,c_1^5\,c_0^5 + 12622\,c_1^4\,c_0^6 - 6339\,c_1^3\,c_0^7 + 2268\,c_1^2\,c_0^8 - 525\,c_1\,c_0^9 + 60\,c_0^{10}) + a^4\,(1920\,c_1^8 - 8244\,c_1^7\,c_0 + 17976\,c_1^6\,c_0^2 - 24800\,c_1^5\,c_0^3 + 23528\,c_1^4\,c_0^4 - 15653\,c_1^3\,c_0^5 + 7200\,c_1^2\,c_0^6 - 2100\,c_1\,c_0^7 + 300\,c_0^8) + a^3\,(2224\,c_1^6 - 7322\,c_1^5\,c_0 + 12218\,c_1^4\,c_0^2 - 12289\,c_1^3\,c_0^3 + 7992\,c_1^2\,c_0^4 - 3150\,c_1\,c_0^5 + 600\,c_0^6) + a^2\,(1312\,c_1^4 - 2975\,c_1^3\,c_0 + 3456\,c_1^2\,c_0^2 - 2100\,c_1\,c_0^3 + 600\,c_0^4) + a\,(396\,c_1^2 - 525\,c_1\,c_0 + 300\,c_0^2) + 60]\,. \tag{19c}$$

$$c_5 = \frac{c_1}{120\,N^7}\,[a^7\,(11\,872\,c_1^{14} - 86\,560\,c_1^{13}\,c_0 + 320\,336\,c_1^{12}\,c_0^2 - 781\,024\,c_1^{11}\,c_0^3 + 1\,388\,144\,c_1^{10}\,c_0^4 - 1\,892\,656\,c_1^9\,c_0^5 + 2\,036\,520\,c_1^8\,c_0^6 - 1\,755\,696\,c_1^7\,c_0^7 + 1\,219\,874\,c_1^6\,c_0^8 - 618\,474\,c_1^5\,c_0^9 + 302\,489\,c_1^4\,c_0^{10} - 103\,980\,c_1^3\,c_0^{11} + 26\,295\,c_1^2\,c_0^{12} - 4380\,c_1\,c_0^{13} + 360\,c_0^{14}) + a^6\,(48\,016\,c_1^{12} - 300\,960\,c_1^{11}\,c_0 + 955\,392\,c_1^{10}\,c_0^2 - 1\,984\,272\,c_1^9\,c_0^3 + 2\,975\,928\,c_1^8\,c_0^4 - 3\,378\,624\,c_1^7\,c_0^5 + 2\,974\,112\,c_1^6\,c_0^6 - 2\,047\,740\,c_1^5\,c_0^7 + 1\,098\,321\,c_1^4\,c_0^8 - 449\,970\,c_1^3\,c_0^9 + 134\,430\,c_1^2\,c_0^{10} - 26\,280\,c_1\,c_0^{11} + 2520\,c_0^{12}) + a^5\,(81\,120\,c_1^{10} - 427\,664\,c_1^9\,c_0 + 1\,141\,272\,c_1^8\,c_0^2 - 1\,968\,888\,c_1^7\,c_0^3 + 2\,414\,464\,c_1^6\,c_0^4 - 2\,191\,980\,c_1^5\,c_0^5 + 1\,494\,906\,c_1^4\,c_0^6 - 760\,080\,c_1^3\,c_0^7 + 277\,725\,c_1^2\,c_0^8 - 65\,700\,c_1\,c_0^9 + 7560\,c_0^{10}) + a^4\,(76\,072\,c_1^8 - 324\,656\,c_1^7\,c_0 + 703\,096\,c_1^6\,c_0^2 - 966\,636\,c_1^5\,c_0^3 + 919\,682\,c_1^4\,c_0^4 - 620\,220\,c_1^3\,c_0^5 + 292\,500\,c_1^2\,c_0^6 - 87\,600\,c_1\,c_0^7 + 12\,600\,c_0^8) + a^3\,(42\,870\,c_1^6 - 140\,922\,c_1^5\,c_0 + 235\,485\,c_1^4\,c_0^2 - 240\,180\,c_1^3\,c_0^3 + 161\,025\,c_1^2\,c_0^4 - 65\,700\,c_1\,c_0^5 + 12\,600\,c_0^6) + a^2\,(14\,877\,c_1^4 - 34\,050\,c_1^3\,c_0 + 41\,070\,c_1^2\,c_0^2 - 26\,280\,c_1\,c_0^3 + 7560\,c_0^4) + a\,(2955\,c_1^3 - 4380\,c_1\,c_0 + 2520\,c_0^2) + 360]\,, \tag{19d}$$

usw. mit der Abkürzung

$$N = a\,(2\,c_1^2 - 2\,c_1\,c_0 + c_0^2) + 1\,. \tag{19e}$$

Wir müssen nun für die Lösungsfunktion $\bar{z}\,(s)$ die Konstanten c_0 und c_1 gemäß den Randbedingungen (11) bestimmen. Mit der dimensionslosen unabhängigen Veränderlichen s folgt für die *radiale Spannung* nach (15)

$$\sigma_r = \frac{2}{3}\,(3\,K + G)\,\bar{z} - \frac{1}{3}\,(3\,K + 4\,G)\,(1 - s)\,\bar{z}' + \frac{1}{9}\,(3\,K + 4\,G)\,a\,\{[\bar{z} - (1 - s)\,\bar{z}']^3 - (1 - s)^3\,\bar{z}'^3\}\,, \tag{20}$$

wobei Striche Ableitungen nach s bedeuten. Für $r = r_a$ wird

$$\bar{z}(0) = c_0\,, \qquad \bar{z}'(0) = c_1\,. \tag{21a}$$

Weiter setzen wir zur Abkürzung

$$S_0 = \bar{z}\left(1 - \frac{r_0}{r_a}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu\,\varrho^\mu\,, \quad S_1 = \frac{r_0}{r_a}\,\bar{z}'\left(1 - \frac{r_0}{r_a}\right) = (1 - \varrho)\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu + 1)\,c_{\mu+1}\,\varrho^\mu \tag{21b}$$

mit

$$\varrho = 1 - \frac{r_0}{r_a}\,.$$

Unter Benutzung der Beziehungen (20) bis (21b) entstehen dann aus (11) für c_0 und c_1 folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3}\,(3\,K + G)\,c_0 - \frac{1}{3}\,(3\,K + 4\,G)\,c_1 + \frac{1}{9}\,(3\,K + 4\,G)\,a\,[(c_0 - c_1)^3 - c_1^3] &= -\,p_a\,, \\ \frac{2}{3}\,(3\,K + G)\,S_0 - \frac{1}{3}\,(3\,K + 4\,G)\,S_1 + \frac{1}{9}\,(3\,K + 4\,G)\,a\,[(S_0 - S_1)^3 - S_1^3] &= -\,p_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Da die Auflösung des Gleichungssystems (22) zu umständlich wird, behandelt man die Randwertaufgabe wie eine Anfangswertaufgabe. Von einem angenommenen c_1 ausgehend,

berechnet man zunächst c_0 aus der ersten Gleichung (22), die man in der Form schreibt:

$$(c_0 - c_1)^3 + 3\,\alpha\,(c_0 - c_1) + 2\,\beta = 0 \tag{23}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{a}\,\frac{3\,K + G}{3\,K + 4\,G}\,, \\ \beta &= \frac{1}{2\,a}\left(\frac{9\,p_a}{3\,K + 4\,G} + 3\,\frac{3\,K - 2\,G}{3\,K + 4\,G}\,c_1 - a\,c_1^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{23a}$$

Sobald die reduzierte kubische Gleichung (23) aufgelöst ist, lassen sich weitere Koeffizienten der Reihenentwicklung nach (19a) bis (19e) und somit die Ausdrücke (21b) berechnen. Aus der zweiten Gleichung (22) folgt dann der zu dem angenommenen c_1 gehörige Innendruck p_0. Die Rechnung wird für verschiedene Werte von c_1 wiederholt und durch Interpolation ein solches c_1 ermittelt, für welches c_0 und c_1 die vorgegebenen Randbedingungen erfüllen.

Die Tangentialspannung σ_φ findet man endlich gemäß (15) mit (16) zu

$$\sigma_\varphi = \frac{2}{3}\,(3\,K + G)\,\bar{z} - \frac{1}{3}\,(3\,K - 2\,G)\,(1 - s)\,\bar{z}' + \frac{1}{9}\,(3\,K + 4\,G)\,a\,[\bar{z}^3 + (1 - s)^3\,\bar{z}'^3]\,. \tag{24}$$

Die Randwerte der Tangentialspannung σ_φ an den Stellen $r = r_a$ und $r = r_0$ ergeben sich dann mit (21a) und (21b) zu

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_\varphi)_{r=r_a} &= \frac{2}{3}\,(3\,K + G)\,c_0 - \frac{1}{3}\,(3\,K - 2\,G)\,c_1 + \frac{1}{9}\,(3\,K + 4\,G)\,a\,(c_0^3 + c_1^3)\,, \\ (\sigma_\varphi)_{r=r_0} &= \frac{2}{3}\,(3\,K + 4\,G)\,S_0 - \frac{1}{3}\,(3\,K - 2\,G)\,S_1 + \frac{1}{9}\,(3\,K + 4\,G)\,a\,(S_0^3 + S_1^3)\,. \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

Ebenso errechnet man nach (15) mit (16) die an den Stirnflächen des Zylinders anzubringende Längsspannung σ_z zu

$$\sigma_z = \frac{2}{3}\,(3\,K - 2\,G)\,\bar{z} - \frac{1}{3}\,(3\,K - 2\,G)\,(1 - s)\,\bar{z}' - \frac{1}{9}\,(3\,K + 4\,G)\,a\,\{\bar{z}^3 + [z - (1 - s)\,\bar{z}']^3\}\,. \tag{25}$$

Wir zeigen noch, daß die Lösungen (20), (24) und (25) für $a \to 0$ in die bekannte Lösung der linearen Theorie übergehen. Nach (19a) bis (19e) erhalten wir für die Koeffizienten der linearen Theorie

$$c_\mu^* = \frac{1}{2}\,(\mu + 1)\,c_1^* \qquad \text{für } \mu > 1\,.$$

Die unendliche Reihe (17) wird dann

$$\bar{z}^*(s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu^*\,s^\mu = c_0^* - \frac{1}{2}\,c_1^* + \frac{1}{2}\,c_1^* \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu + 1)\,s^\mu\,.$$

Nun gewinnt man aber durch gliedweises Differentieren der geometrischen Reihe die Beziehung

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)\,x^n = \frac{1}{(1 - x)^2}\,.$$

Damit folgt

$$\bar{z}^*(s) = c_0^* - \frac{1}{2}\,c_1^* + \frac{1}{2}\,\frac{c_1^*}{(1 - s)^2}$$

oder

$$z^*(r) = c_0^* - \frac{1}{2}\,c_1^*\left(1 - \frac{r_a^2}{r^2}\right). \tag{26}$$

Die Randbedingungen (11) verlangen bekanntlich

$$c_0^* = \frac{1}{2\,G}\,\frac{p_0 - p_a}{R^2 - 1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{3\,K + G}\,\frac{p_0 - p_a\,R^2}{R^2 - 1}\,, \qquad c_1^* = \frac{1}{G}\,\frac{p_0 - p_a}{R^2 - 1} \tag{27}$$

mit

$$R = \frac{r_a}{r_0}\,. \tag{27a}$$

Die Spannungskomponenten der linearen Theorie nehmen damit in der Tat die bekannten[1] Werte an

$$\sigma_r^* = \frac{1}{R^2-1}\left[p_0 - p_a R^2 - (p_0 - p_a)\frac{r_a^2}{r^2}\right], \quad \sigma_\varphi^* = \frac{1}{R^2-1}\left[p_0 - p_a R^2 + (p_0 - p_a)\frac{r_a^2}{r^2}\right], \quad \sigma_z^* = \frac{3K-2G}{3K+G}\frac{p_0 - p_a R^2}{R^2-1}, \tag{28}$$

und insbesondere die Randwerte

$$(\sigma_\varphi^*)_{r=r_a} = \frac{1}{R^2-1}[2p_0 - p_a(R^2+1)], \qquad (\sigma_\varphi^*)_{r=r_0} = \frac{1}{R^2-1}[p_0(R^2+1) - 2p_a R^2]. \tag{29}$$

Als Beispiel eines Werkstoffes, das ein nichtlineares Verhalten zeigt, betrachten wir hier gezogenes Kupfer, für welches

$$K = 1{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}, \quad G = 0{,}46 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}, \quad \gamma_2 = -0{,}18 \cdot 10^6$$

errechnet wurde[2]. Es handelt sich also dabei um sehr kleine Abweichungen vom *Hooke*schen Gesetz. Abb. 2 zeigt den nach den Formeln (20), (24) und (25) berechneten Verlauf der Radialspannung σ_r, der Tangentialspannungen σ_φ und der Längsspannung σ_z, und den Verlauf von σ_φ^* und σ_z^* nach (28) längs eines Halbmessers (und zwar für $R = 1{,}25$ und $p_0 = 200\ \mathrm{kg/cm^2}$, $p_a = 0$). Man sieht, daß die Spannung infolge der Nichtlinearität gleichmäßiger verläuft

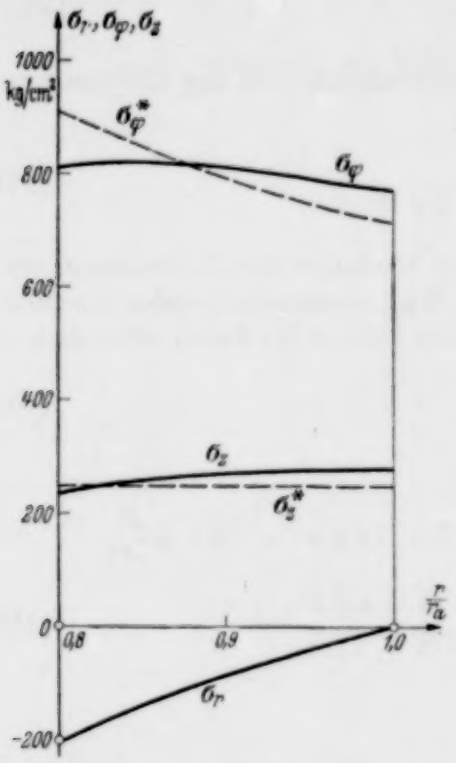

Abb. 2. Spannungen im dickwandigen Rohr.

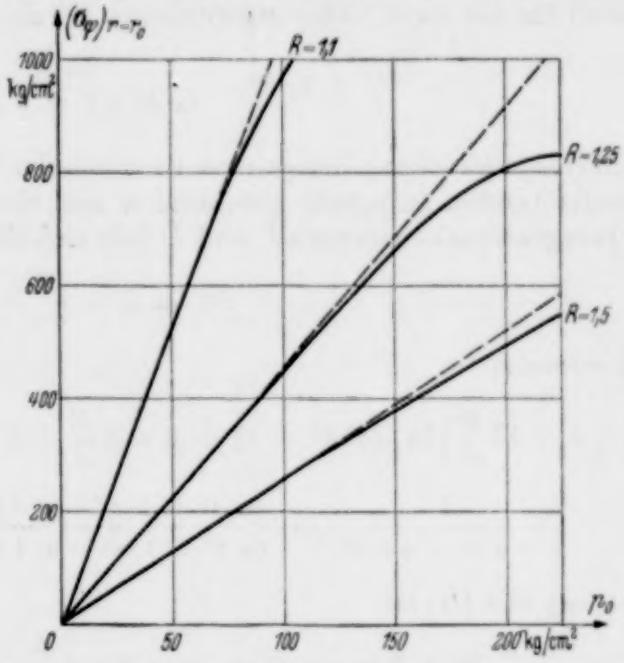

Abb. 3. Die Abhängigkeit der Tangentialspannung vom Innendruck.

und so das Material besser ausgenützt wird. Um eine Anschauung von der Art der Abhängigkeit des Ausdruckes für $(\sigma_\varphi)_{r=r_0}$ vom Innendruck p_0 zu erhalten, wobei wieder $p_a = 0$ gesetzt ist, ist in Abb. 3 $(\sigma_\varphi)_{r=r_0}$ abhängig von p_0 für verschiedene Werte von R graphisch dargestellt. Mit steigendem R weichen die Kurven $(\sigma_\varphi)_{r=r_0}$ immer mehr von den Geraden der linearen Theorie ab, die gestrichelt eingetragen sind. Der Einfluß der Nichtlinearität wird also bei größeren Halbmesserverhältnissen stärker.

4. Lösung durch sukzessive Näherung. Für größere Werte von R konvergiert die Potenzreihenentwicklung von Ziff. 3 recht langsam. Wir geben deshalb noch die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (13) durch sukzessive Approximation an.

Zu diesem Zweck bringen wir (13) auf die Form

$$r z'' + 3z' = \frac{a(2rz' + z)rz'^2}{2ar^2z'^2 + 2arzz' + az^2 + 1}. \tag{30}$$

Striche bedeuten jetzt Ableitungen nach r.

[1] Vgl. z. B. *S. Timoshenko*, Theory of Elasticity, 1. Aufl., S. 56, New York 1934.

[2] Nach Versuchsergebnissen von *K. Claus*, Bestimmung der *Poisson*schen Zahl reiner Metalle und ihr Gang im Periodischen System, S. 39. Diss. Stuttgart 1953.

Für die Näherung nullter Ordnung behandelt man die Randwertaufgabe der homogenen Gleichung

$$r z^{(0)\prime\prime} + 3 z^{(0)\prime} = 0 , \tag{31}$$

deren Lösung sofort geschlossen angebbar ist:

$$z^{(0)} = A + \frac{B}{r^2} . \tag{32}$$

Sie stellt auch die Lösung der linearen Theorie dar, die sich für $a = 0$ ergibt. Die Integrationskonstanten A und B sind aus den Randbedingungen zu bestimmen. Unter Berücksichtigung von (11) und (15) ergeben sich zwei nichtlineare Gleichungen für A und B. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{3}(3K+G)\,A - 2G\,B' + \frac{1}{9}(3K+4G)\,a\,[(A-B')^3 - 8\,B'^3] = -p_a , \\ &\frac{2}{3}(3K+G)\,A - 2G\,R^2 B' + \frac{1}{9}(3K+4G)\,a\,[(A-R^2B')^3 - 8\,R^6 B'^3] = -p_0 \end{aligned}\right| \tag{33}$$

mit den Abkürzungen

$$B' = \frac{B}{r_a^2}, \qquad R = \frac{r_a}{r_0} . \tag{33a}$$

Den Lösungswert $z^{(0)}$ setzen wir in die rechte Seite der Differentialgleichung (30) und erhalten somit für die erste Näherungsfunktion $z^{(1)}$ die Gleichung

$$r z^{(1)\prime\prime} + 3 z^{(1)\prime} = \frac{4\,a\,B^2\,(Ar^2 - 3\,B)}{(a\,A^2+1)\,r^4 - 2\,a\,A\,B\,r^2 + 5\,a\,B^2}\,\frac{1}{r^3} . \tag{34}$$

Diese Differentialgleichung integrieren wir nach der Methode der Variation der Konstanten, wobei die auftretenden Integrale geschlossen auf elementarem Weg ermittelt werden können. Mit den Integrationskonstanten C und D läßt sich die Lösung von (34) in der Form schreiben

$$z^{(1)} = C + \frac{D}{r^2} + f(r) , \tag{35}$$

wobei zu setzen ist

$$\begin{aligned} f(r) = \frac{1}{50}\Bigg\{&\left(A - 15\,\frac{B}{r^2}\right)\ln\left|(a\,A^2+1) - 2\,a\,A\,\frac{B}{r^2} + 5\,a\,\frac{B^2}{r^4}\right| - \left(15 + 14\,a\,A^2 - 10\,a\,A\,\frac{B}{r^2}\right) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{-\,a\,(5+4\,a\,A^2)}}\ln\left|\frac{(a\,A^2+1)\,r^2 - a\,A\,B + B\sqrt{-\,a\,(5+4\,a\,A^2)}}{(a\,A^2+1)\,r^2 - a\,A\,B - B\sqrt{-\,a\,(5+4\,a\,A^2)}}\right|\Bigg\} . \end{aligned} \tag{36}$$

Die Ableitung von $f(r)$ ist

$$\begin{aligned} f'(r) = \frac{B}{5\,r^3}\Bigg\{&6 + 3\ln\left|(a\,A^2+1) - 2\,a\,A\,\frac{B}{r^2} + 5\,a\,\frac{B^2}{r^4}\right| \\ &- \frac{2\,a\,A}{\sqrt{-\,a\,(5+4\,a\,A^2)}}\ln\left|\frac{(a\,A^2+1)\,r^2 - a\,A\,B + B\sqrt{-\,a\,(5+4\,a\,A^2)}}{(a\,A^2+1)\,r^2 - a\,A\,B - B\sqrt{-\,a\,(5+4\,a\,A^2)}}\right|\Bigg\} . \end{aligned}$$

Nach (15) erhalten wir jetzt für die Näherungen erster Ordnung der Spannungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{2}{3}(3K+G)\,z^{(1)} + \frac{1}{3}(3K+4G)\,r z^{(1)\prime} + \frac{1}{9}(3K+4G)\,a\,[(z^{(1)} + r z^{(1)\prime})^3 + r^3 z^{(1)\prime 3}] , \\ \sigma_\varphi^{(1)} &= \frac{2}{3}(3K+G)\,z^{(1)} + \frac{1}{3}(3K-2G)\,r z^{(1)\prime} + \frac{1}{9}(3K+4G)\,a\,[z^{(1)3} - r^3 z^{(1)\prime 3}] , \\ \sigma_z^{(1)} &= \frac{1}{3}(3K-2G)\,(2\,z^{(1)} + r z^{(1)\prime}) - \frac{1}{9}(3K+4G)\,a\,[z^{(1)3} + (z^{(1)} + r z^{(1)\prime})^3] . \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Die Randbedingungen (11) liefern zwei nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten C und D. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{3}(3K+G)\,[C + D' + f(r_a)] - \frac{1}{3}(3K+4G)\,[2\,D' - r_a f'(r_a)] \\ &+ \frac{1}{9}(3K+4G)\,a\,\{[C - D' + f(r_a) + r_a f'(r_a)]^3 - [2\,D' - r_a f'(r_a)]^3\} = -p_a , \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2}{3}(3K+G)[C+R^2D'+f(r_0)]-\frac{1}{3}(3K+4G)[2R^2D'-r_0f'(r_0)]\\&+\frac{1}{9}(3K+G)a\{[C-R^2D'+f(r_0)+r_0f'(r_0)]^3-[2R^2D'-r_0f'(r_0)]^3\}=-p_0,\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

wo

$$D'=\frac{D}{r_a^2}\tag{38a}$$

gesetzt ist.

Somit hat man die Näherungslösung erster Ordnung für die Differentialgleichung (30) unter den Randbedingungen (11) gefunden. Diese Rechenvorschrift der sukzessiven Näherung könnte weiter fortgesetzt werden, so daß die Verschiebung sowie die gesuchte Spannungsverteilung beliebig genau angenähert werden könnte.

Zum Schluß danke ich Herrn Prof. *R. Grammel* sowie der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Möglichkeit, diese Untersuchung durchführen zu können.

(Eingegangen am 21. Mai 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *F. Jindra*, Stuttgart-O, Gerokstr. 70.

Die Formzahlen tordierter Wellen mit mehreren Nuten.

Von H. Ōkubo.

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit wird ein einfaches Verfahren zur genäherten Berechnung der Formzahlen für tordierte Wellen mit mehreren Nuten mitgeteilt. Ausgehend von der exakten Lösung für halbkreisförmige Mehrfachnuten, ermitteln wir zuerst die Formzahl für unendlich kleine Mehrfachnuten (Ziff. 2) und leiten daraus ein praktisch brauchbares Näherungsverfahren für endlich ausgedehnte, aber hinreichend kleine Mehrfachnuten her (Ziff. 3). Seine Güte wird durch Vergleich mit den exakten Ergebnissen aus numerischer Rechnung geprüft.

Die von uns gefundene Formzahl unterscheidet sich schon bei unendlich kleinen Mehrfachnuten wesentlich von einem von *H. Neuber* [1] angegebenen Ausdruck. Daher sei zunächst dieser kurz entwickelt. Für eine Einzelnut mit starker Kerbkrümmung $1/\varrho$ und der Tiefe t beträgt die Formzahl $\sqrt{t/\varrho}$. Reihen sich unendlich viele solcher Nuten im gleichen Abstand b aneinander, so wird die Formzahl

$$\alpha_k = \sqrt{\gamma\, t/\varrho} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{b}{\pi t}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi t}{b}\,; \tag{1}$$

der Faktor $\gamma \leqq 1$ ist die Entlastungszahl. Man erhält also α_k aus der Formzahl für die entsprechende Einzelnut, indem man diese im Verhältnis

$$R_0 = \sqrt{\gamma} \tag{2}$$

vergrößert oder auch, indem man bei der Mehrfachnut die wirkliche Tiefe t durch eine wirksame Tiefe $\gamma\, t$ ersetzt, im übrigen aber den Ausdruck für die Formzahl der Einzelnut benützt. Auf Grund von rechnerischen Untersuchungen schließt *H. Neuber*, daß sich dieses Vorgehen nicht nur bei starker Kerbkrümmung, sondern ganz allgemein beim Übergang von der Einzelnut zum mehrfach genuteten Rand bewähre. Er setzt so z. B. für flache Mehrfachnuten endlicher Krümmung als Formzahl

$$\alpha_k = 1 + \sqrt{\gamma\, t/\varrho} \tag{3}$$

an, d. h. er vergrößert die Formzahl der entsprechenden Einzelnut im Verhältnis

$$R = \frac{1 + \sqrt{\gamma\, t/\varrho}}{1 + \sqrt{t/\varrho}}\,. \tag{4}$$

Die in (3) ausgedrückte *Neuber*sche Regel ist heute in der Praxis in Gebrauch.

2. Unendlich kleine Mehrfachnuten endlicher Kerbkrümmung. Wir betrachten eine Folge von sehr kleinen Nuten, deren Tiefe t und Kerbkrümmungshalbmesser ϱ sich nur wenig voneinander unterscheiden (Abb. 1). Besitzt die auf Torsion beanspruchte Welle vom Halbmesser Eins m solche Längsnuten, so ist die größte Schubspannung im Kerbgrund der Nuten [2]

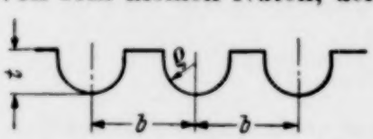

Abb. 1. Unendlich kleine, fast halbkreisförmige Mehrfachnut.

$$\tau_{max} = G\,\omega\left[c + \frac{m\,c^{m-1}\,(1-c^2)}{1-c^{2\,m}}\right]; \tag{5}$$

hier ist G der Schubmodul, ω die spezifische Verdrehung der Welle und $c = 1 - t$. Dies entspricht bei m sehr kleinen Längsnuten einer Formzahl

$$\alpha_k = \frac{\tau_{max}}{G\,\omega} = c + \frac{m\,c^{m-1}\,(1-c^2)}{1-c^{2\,m}}\,. \tag{6}$$

Daraus erhalten wir durch Grenzübergang $m \to \infty$ bei festgehaltenem Wert $m\,t$ leicht die Formzahl für unendlich viele, unendlich kleine Nuten zu

$$\alpha_k = 1 + \frac{2\,\pi\,t}{b\,\mathfrak{Sin}\,\dfrac{2\,\pi\,t}{b}}\,. \tag{7}$$

[1] Für das Folgende vgl. *H. Neuber*, Kerbspannungslehre, S. 139 u. 141, Berlin 1937.

[2] *H. Ōkubo*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 17 (1950), S. 359

In Polarkoordinaten r, ϑ mit dem in Abb. 2 angegebenen Pol in der Nutenmitte lautet dabei die Gleichung für das Nutenprofil

$$t\left(1-e^{-\frac{2\pi t}{b}}\right)\left(1-e^{-\frac{4\pi r}{b}\cos\vartheta}\right) = r\left(1+e^{-\frac{2\pi t}{b}}\right)\left[1+e^{-\frac{4\pi r}{b}\cos\vartheta}-2\,e^{-\frac{2\pi r}{b}\cos\vartheta}\cos\left(\frac{2\pi r}{b}\sin\vartheta\right)\right]\cos\vartheta\,, \tag{8}$$

und der Krümmungshalbmesser im Kerbgrund der Nut beträgt

$$\varrho = \frac{b}{4\pi^2 t}\left(2\pi t + b\,\mathfrak{Sin}\frac{2\pi t}{b}\right)\mathfrak{Tg}\frac{\pi t}{b}\,. \tag{9}$$

Wenn der Nutenabstand b groß gegen r oder die Nutentiefe t ist, vereinfacht sich (8) zu $r = t$, und es liegen dann halbkreisförmige Nuten vom Halbmesser t vor. Für nicht hinreichend große Werte b ist dagegen das Verhältnis $\varrho/t \neq 1$ und ist aus (9) zu berechnen; doch zeigt Abb. 3, daß der Wert ϱ/t nur für sehr nahe nebeneinander liegende Nuten (b/t klein) merklich von Eins verschieden ist. In allen anderen Fällen liegen praktisch halbkreisförmige Nuten vor.

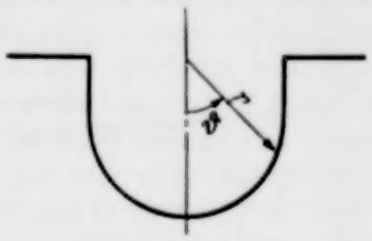

Abb. 2. Polarkoordinaten.

Für das Formzahlverhältnis bei unendlich vielen Nuten folgt nunmehr aus (7) und (3) (mit $\gamma = 1$)

$$R_1 = \left(1+\frac{2\pi t}{b\,\mathfrak{Sin}\frac{2\pi t}{b}}\right)\Big/\left(1+\sqrt{t/\varrho}\right), \tag{10}$$

wo ϱ/t über (9) in Abhängigkeit von b/t gegeben ist. Abb. 3 zeigt den Verlauf von R_1 und zum Vergleich die *Neuber*schen Werte R (4) als Funktionen von b/t. Dazu ist noch die Kurve R_0 (2) gestrichelt eingezeichnet, die für stark gekrümmte Mehrfachnuten gilt. Es muß auffallen, daß sich die *Neuber*schen Werte R (4) durchweg stark von den Werten R_1 unterscheiden und außerdem, entgegen der Erwartung, nicht in das zwischen den Kurven R_0 und R_1 gelegene, schraffiert gezeichnete Gebiet fallen. Die *Neuber*sche Regel zur Gewinnung der Formzahlen für Mehrfachnuten führt also in unserem Beispiel auf Formzahlverhältnisse R, die sich nach der verkehrten Seite auswirken. Daher läßt sich diese aus den Verhältnissen bei stark gekrümmten Nuten gewonnene Regel nicht allgemein aufrechterhalten, sondern es muß der Sachverhalt bei Mehrfachnuten erneut untersucht werden.

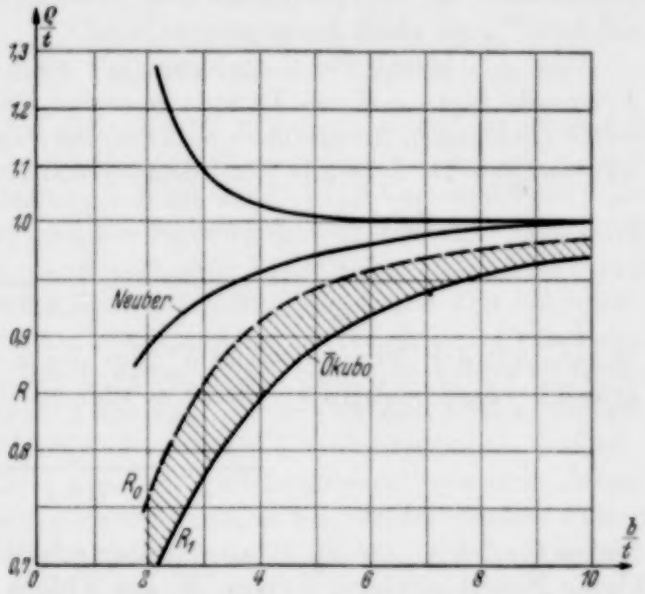

Abb. 3. Formfaktor ϱ/t und Formzahlverhältnisse R für fast halbkreisförmige, unendlich kleine Mehrfachnuten.

Es sei noch bemerkt, daß unser Ergebnis (10) sowohl für Längsnuten als auch für gleich gestaltete Querrillen (Ringnuten) gilt, da es sich um unendlich kleine Nuten handelt. Aus ihm wollen wir nun eine brauchbare Näherungslösung für endlich kleine Querrillen herleiten.

3. Endlich kleine Querrillen. *S. Momma* [1] hat an Hand numerischer Rechnungen gezeigt, daß für verhältnismäßig kleine Querrillen der Faktor R mit abnehmendem Krümmungshalbmesser ϱ nur sehr langsam zunimmt, sofern man hierbei die Werte von Rillentiefe und -abstand fest läßt. Man erhält daher genauere Werte des Formzahlverhältnisses R, wenn man zwischen den beiden Grenzkurven R_0 und R_1 in Abb. 3 interpoliert; denn nach den *Momma*schen Rechnungen fällt der Wert von R für beliebige Werte $\varrho/t \leqq (\varrho/t)_0$ in das schraffierte Gebiet der Abb. 3, wobei $(\varrho/t)_0$ in Abhängigkeit von b/t durch die ϱ/t-Kurve in Abb. 3 gegeben wird. Wir erläutern die Verhältnisse an Hand von Abb. 4, die nach Rechnungen von *Momma* für $b/t = 3$, $t/d = 0{,}05$ mit d als kleinstem Wellendurchmesser entworfen ist. Die Grenzwerte R_0 und R_1 für unendlich kleine Nuten mit $b/t = 3$ sind der Abb. 3 entnommen. Wie man sieht, liegen sie

[1] *S. Momma*, J. Appl. Phys. 24 (1953), S. 959.

ziemlich nahe bei den entsprechenden Werten für endlich kleine Nuten. Die vergleichsweise kleine Unstimmigkeit zwischen beiden Werten R an der Stelle $\varrho = 0$ ist hauptsächlich den von *Momma* gewählten Nutenprofilen zuzuschreiben. Ihre Form bleibt nicht konstant, sondern ändert sich so, daß die Spannung im Kerbgrund der Nut bei abnehmendem Krümmungshalbmesser etwas größer als bei Nuten ausfällt, deren Form sich mit ϱ nicht ändert [1]. Daher ist der richtige Wert für das Formzahlverhältnis R an der Stelle $\varrho = 0$ etwas kleiner als der in Abb. 4 eingezeichnete *Mommas*che Wert anzusetzen und wird so näher bei R_0 liegen. Bei genügend kleinen Nuten werden daher die Werte von R_0 und R_1 praktisch nicht von dem Größenverhältnis der Nuten zur Welle abhängen. Nehmen wir weiter an, daß sich R linear mit ϱ/t ändert, so kommt

$$R = R_0 + (R_1 - R_0)\left(\frac{t}{\varrho}\right)_0 \frac{\varrho}{t}. \tag{11}$$

Abb. 4 zeigt für $b/t = 3$, daß sich die Interpolationsgerade (11) der genauen *Mommas*chen Kurve sehr gut anpaßt. Somit läßt sich das Formzahlverhältnis R mit Hilfe von (11) für endlich kleine Nuten näherungsweise bestimmen, womit sich die Formzahl für mehrere Querrillen aus der Formzahl α_{k0} für eine Einzelrille gemäß

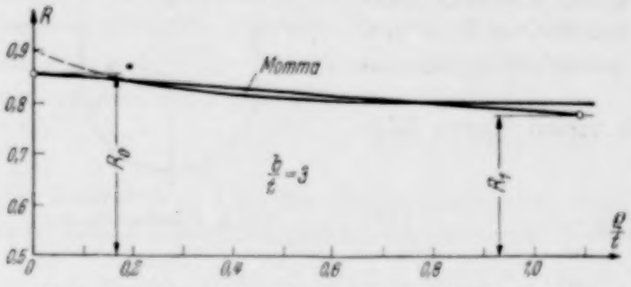

Abb. 4. Zur Interpolation des Formzahlverhältnisses R bei mehrfachen, endlich kleinen Querrillen.

$$\alpha_k = R\,\alpha_{k0} \tag{12}$$

ergibt. Die Berechnung von α_{k0} bereitet auch bei mäßig großen Nuten keine besonderen Schwierigkeiten, da hierfür einfache Formeln vorliegen [2].

Die Formzahl wird gewöhnlich als Verhältnis der Spannungsgrößtwerte bei gleicher Torsionsbeanspruchung der Welle mit und ohne Nuten definiert. Es ist aber zu beachten, daß dann die Beziehung (10) bei mehreren Längsnuten endlicher Abmessungen auch nicht näherungsweise gilt. Vielmehr ist der auf das Torsionsmoment bezogene Wert des Formzahlverhältnisses R oft viel größer als Eins, weil nämlich die Torsionssteifigkeit von Wellen mit vielen solchen Nuten stark herabgesetzt wird.

Dagegen bleibt die Beziehung (10) auch für mäßig große Nuten bestehen, wenn man die Formzahl nicht auf das Torsionsmoment, sondern auf den Torsionswinkel bezieht. Beispielsweise erhält man für mehrere halbkreisförmige Längsnuten mit $c = 0{,}63$ oder also $t = \varrho = 0{,}37$ näherungsweise folgende Spannungsgrößtwerte [3]:

Zahl der Nuten m	1	2	3	4
$\tau_{max}/G\,\omega$	1,63	1,52	1,38	1,23

Messen wir den Nutenabstand b längs des Kreises vom Halbmesser c, der die Nuten im Kerbgrund berührt, so wird $b = 2\pi c/m$ oder $b/t = 2\pi c/mt$. Dies führt auf die Wertetabelle

b/t	5,35	3,57	2,68
R	0,93	0,85	0,75

Die so für Nuten mäßiger Ausdehnung erhaltenen Werte R stimmen fast mit den für unendlich kleine Nuten gültigen Werten R_1 aus Abb. 3 überein. Die Beziehung (10) gilt also näherungsweise ebenso für Längsnuten wie für Querrillen selbst bei mäßig großer Nutenausdehnung, sofern man die Formzahl jetzt auf den Torsionswinkel, im früheren Falle endlich kleiner Querrillen dagegen auf das Torsionsmoment bezieht.

(Eingegangen am 11. Juni 1954.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *H. Ökubo*, Faculty of Engineering, Nagoya University, Chigusaku, Nagoya, Japan.

[1] Vgl Fußnote 1 von S. 131.

[2] *F. A. Willers*, Z. Math. Physik 55 (1907), S. 251; *R. Sonntag*, Z. angew. Math. Mech. 9 (1929), S. 3; *H. Neuber*, a. a. O., S. 90; *H. Ökubo*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 19 (1952), S. 16. Einen weiteren Beitrag gibt die Arbeit des Verf. „Stress concentration factors for a circumferential notch in a cylindrical shaft", die in den Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University 6 (1954) Nr. 1 erscheint.

[3] Vgl. Fußnote 2 von S. 130.

Die strenge Theorie anisotroper prismatischer Faltwerke.

Von D. Rüdiger.

1. Einleitung. Mit der vorliegenden Arbeit[1] wird die Theorie der beliebig anisotropen prismatischen Faltwerke, also die Theorie der aus einzelnen, anisotropen rechteckigen Platten, Zylinderschalen und Stäben zusammengesetzten Tragwerke, deren in Abständen angeordnete Binderscheiben einen räumlichen Spannungszustand erzwingen, aufgestellt (Abb. 1).

Die ersten Untersuchungen über räumliche Tragwerke, die aus ebenen Tragflächen gebildet werden, sind wohl zuerst im Jahre 1920 von *H. Schwyzer*[2] für U-, I- und Kastenprofile des Stahlbaues durchgeführt worden. Als Verträglichkeitsbedingungen der an ausgezeichneten Punkten zusammenstoßenden Scheiben wird die Gleichheit der Spannungen verwendet. Der Gedanke, prismatische Faltwerke im Stahlbetonbau als tragende und zugleich raumabschließende Konstruktionen zu verwenden, geht auf ein Zusatzpatent der Dyckerhoff & Widmann AG. aus dem Jahre 1927 zurück. Diese Tragwerke werden als Abwandlung des Zeiß-Dywidag-Schalendaches dargestellt, indem die stetige Kurve durch ein um- oder einbeschriebenes Vieleck ersetzt wird[3]. Zu der gleichen Zeit hat *G. Ehlers*[4] auf einem Vortrag vor Ingenieuren der Wayß & Freytag AG. auf ein neues Konstruktionsprinzip aufmerksam gemacht, bei dem Scheiben und Platten zu räumlichen Tragwerken zusammengesetzt werden, ohne speziell an prismatische Tragwerke mit Überhöhung gegenüber der Mittelkraftlinie zu denken. Der Name Faltwerk ist zuerst von *H. Craemer*[5] in einer Arbeit über Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente des Eisenbetonbaues geprägt worden. Die Theorie der prismatischen Faltwerke ist grundlegend durch die Abhandlungen von *G. Ehlers*[4], *H. Craemer*[5], *E. Gruber*[6], *G. Grüning*[7], *J. Goldenblatt* und *E. Ratz*[8], *R. Ohlig*[9] gefördert worden[10].

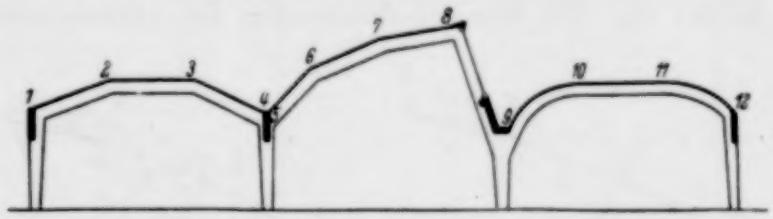

Abb. 1. Querschnitt einer Faltwerkkonstruktion.

In allen diesen Arbeiten wird der Berechnung ein Gelenkwerk zugrunde gelegt, bei dem der biegungssteife Zusammenschluß der zwischen den aussteifenden Binderscheiben und den Falten liegenden Platten durch eine scharnierartige Verbindung ersetzt wird. Eine Verträglichkeit der Platten an den Kanten wird durch die Bedingung gleicher Spannungen gefordert. Dazu wird die Flächenbelastung statisch durch eine in den Kanten wirkende Linienbelastung ersetzt und die Notwendigkeit gleicher Spannungen durch Schubkräfte erfüllt. Die durch den Verschiebungszustand an den Kanten sekundär eintretenden Biegemomente werden auf Grund der winkeltreuen Verformung unter Vernachlässigung der Biegemomente und Querkräfte in Richtung der Erzeugenden sowie der Drillmomente berücksichtigt. Diese von der Schalentheorie entlehnte Trennung der ohne Zweifel zusammenhängenden statisch unbestimmten Aufgabe trägt in die Berechnung eine gewisse Willkürlichkeit hinein. Man kann wohl von den „Membranlösungen" der Schalen sagen, daß diese in den meisten technisch interessierenden Fällen praktisch mit den Partikularlösungen der vollständigen Differentialgleichungen zusammen-

[1] Dresdner Habilitationsschrift.
[2] *H. Schwyzer*, Diss. Zürich 1920.
[3] *Fr. Dischinger* u. *U. Finsterwalder*, Bauing. 9 (1928) S. 811.
[4] *G. Ehlers*, Bauing. 11 (1930) S. 125, 319, 369; Beton und Eisen 29 (1930) S. 281, 291.
[5] *H. Craemer*, Beton u. Eisen 28 (1929) S. 254, 276, 269, 337, 339; 29 (1930) S. 276; 36 (1937) S. 297; Bauing. 21 (1940) S. 268; Öster. Ing.-Arch. 4 (1950) S. 350.
[6] *E. Gruber*, Abh. Intern. Ver. f. Brücken- u. Hochbau 1 (1932) S. 225; 2 (1932) S. 276; 3 (1935) S. 134; 7 (1944) S. 139; 12 (1952) S. 167; Bautechnik-Archiv 7 (1953) S. 62; Bauing. 23 (1942) S. 323.
[7] *G. Grüning*, Ing.-Arch. 3 (1932) S. 319.
[8] *J. Goldenblatt* u. *E. Ratz*, Beton- u. Eisen 33 (1934) S. 369.
[9] *R. Ohlig*, Diss. Darmstadt 1934; Ing.-Arch. 6 (1935) S. 346; 12 (1941) S. 254.
[10] Hierbei sei ein Buch von *W. S. Wlaßow*, Moskau, 1949 in russischer Sprache erwähnt, das u. a. auch die Theorie prismatischer Faltwerke behandelt. Die Berechnung wird etwa in der von *Hartenbach*[11] vorgeschlagenen Form durchgeführt.
[11] *Hartenbach*, EMPA-Ber. 99 (1945) S. 162.

fallen; für die Lösung des Gelenksystems des Faltwerkes gilt das aber nicht. Eine strenge Erfüllung der Verträglichkeit der Verschiebungen längs der Kanten ist nur durch die gleichzeitige Wirkung sämtlicher in den Schnitten vorhandenen Schnittkräfte gegeben. Damit ist die Theorie aufgezeigt.

2. Geometrie. Abb. 2 zeigt den Querschnitt einer Faltwerkreihe. Die Kanten werden mit großen Buchstaben J, K bezeichnet. Die zwischen den Kanten in verschiedenen Ebenen liegenden Platten der Dicke h_l erhalten arabische Ziffern 1, 2, 3 .... l. Der Abstand zweier

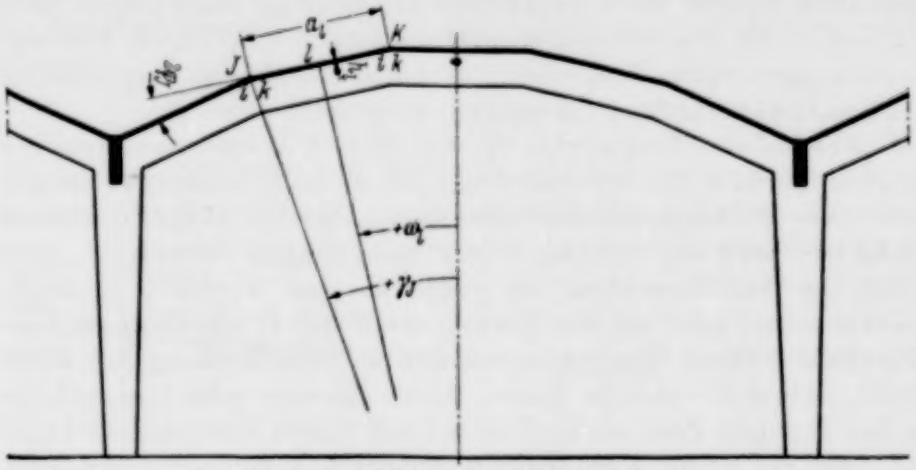

Abb. 2. Bezeichnungen zur Faltwerktheorie.

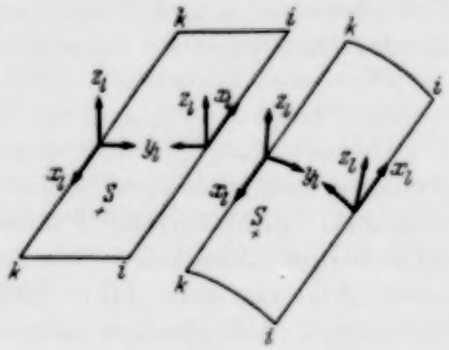

Abb. 3. Anordnung der Koordinatensysteme (x_l, y_l, z_l).

Kanten JK ist die Breite a_l der Platte. Ihre Länge ist durch den Abstand L der aussteifenden Binder bestimmt. Die Winkel, welche die Plattennormalen mit der Vertikalen einschließen, heißen ω_l. Die Winkelhalbierenden der zusammenstoßenden Platten bilden mit der Vertikalen die Winkel γ_J, γ_K. An der Kante J bestimmen die beiden anliegenden Platten mit den Schnittufern i und k den Winkel $2\varphi_J$. Jede im Raum liegende Platte l wird ebenso wie ein Zylinderschalenteil von jedem Ufer i und k durch ein rechtsgewundenes Koordinatensystem x_l, y_l, z_l nach Abb. 3 beschrieben.

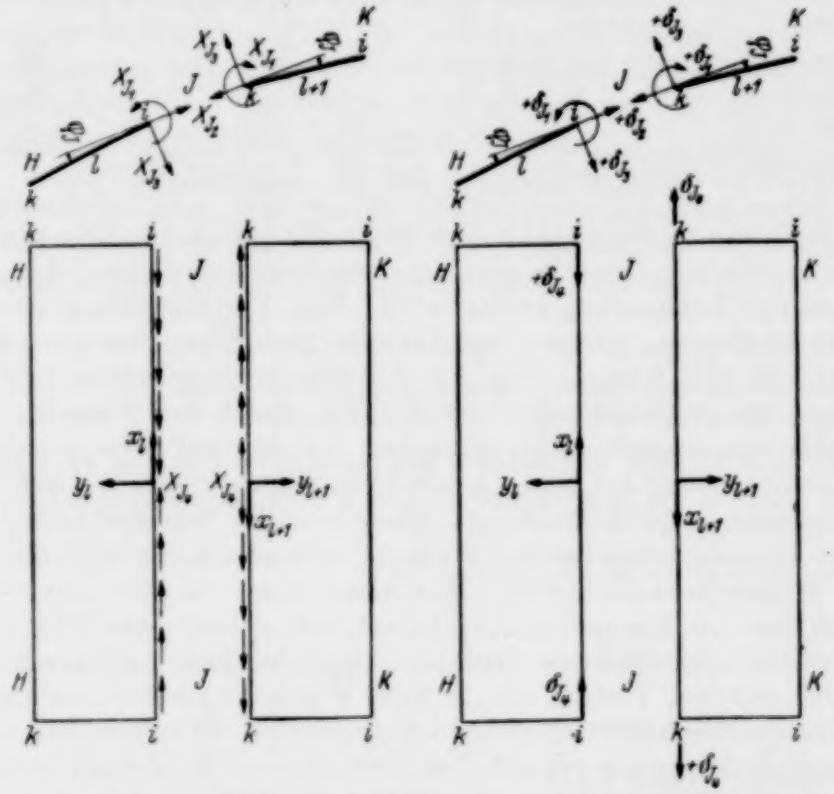

Abb. 4. Definition der Verbindungskräfte und der Verschiebungen in den Kanten.

3. Allgemeine Lösung. Zur Berechnung dieser Tragwerke werden die durch eine beliebige Belastung in den Platten (Scheiben) und Zylinderschalen auftretenden Spannungen in üblicher Weise zu Schnittgrößen (Längskräfte, Schubkräfte, Biegemomente, Drillmomente) zusammengefaßt. Wird das in Abb. 1 dargestellte Tragwerk an den Verbindungsstellen J aufgeschnitten, so treten an jedem Ufer vier Schnittgrößen als äußere Kräfte heraus. Diese sind: Querkraft + Drillmoment, Längskraft, Schubkraft und Biegemoment. Wenn es nun gelingt, diese äußeren Kräfte so zu bestimmen, daß für die Ufer des geführten Schnittes die geometrische Verträglichkeit der Verschiebungen besteht, ist die Aufgabe gelöst. Zu diesem Zwecke werden an den Schnittufern i und k wirkende Kräfte zu vier statisch unbestimmten Größen X_{J_1}, X_{J_2}, X_{J_3}, X_{J_4} zusammengefaßt. Gleichzeitig wird der Verschiebungszustand δ_{J_1}, δ_{J_2}, δ_{J_3} und δ_{J_4} definiert (Abb. 4).

Die in Abb. 4 definierten Überzähligen sind Funktionen von x_l. Das gilt auch für den Verschiebungszustand der Schnittufer. Da es nun möglich ist, die Verschiebungen der Ufer i und k

I. Gleichungssystem.

		A				B				C				L				M				
		X_{A_1}	X_{A_2}	X_{A_3}	X_{A_4}	X_{B_1}	X_{B_2}	X_{B_3}	X_{B_4}	X_{C_1}	X_{C_2}	X_{C_3}	X_{C_4}	X_{L_1}	X_{L_2}	X_{L_3}	X_{L_4}	X_{M_1}	X_{M_2}	X_{M_3}	X_{M_4}	
A	δA_1	=	=	=	=	—	—	—	—													=
	δA_2	=	=	=	=	—	—	—	—													=
	δA_3	=	=	=	=	—	—	—	—													=
	δA_4	=	=	=	=	—	—	—	—													=
B	δB_1	—	—	—	—	=	=	=	=	—	—	—	—									=
	δB_2	—	—	—	—	=	=	=	=	—	—	—	—									=
	δB_3	—	—	—	—	=	=	=	=	—	—	—	—									=
	δB_4	—	—	—	—	=	=	=	=	—	—	—	—									=
C	δC_1					—	—	—	—	=	=	=	=									=
	δC_2					—	—	—	—	=	=	=	=									=
	δC_3					—	—	—	—	=	=	=	=									=
	δC_4					—	—	—	—	=	=	=	=									=
D	δD_1									—	—	—	—									=
	δD_2									—	—	—	—									=
	δD_3									—	—	—	—									=
	δD_4									—	—	—	—									=
E	δE_1																					=
	δE_2																					=
	δE_3																					=
	δE_4																					=
F	δF_1																					=
	δF_2																					=
	δF_3																					=
	δF_4																					=
G	δG_1																					=
	δG_2																					=
	δG_3																					=
	δG_4																					=
H	δH_1																					=
	δH_2																					=
	δH_3																					=
	δH_4																					=
J	δJ_1																					=
	δJ_2																					=
	δJ_3																					=
	δJ_4																					=
K	δK_1													—	—	—	—					=
	δK_2													—	—	—	—					=
	δK_3													—	—	—	—					=
	δK_4													—	—	—	—					=
L	δL_1													=	=	=	=	—	—	—	—	=
	δL_2													=	=	=	=	—	—	—	—	=
	δL_3													=	=	=	=	—	—	—	—	=
	δL_4													=	=	=	=	—	—	—	—	=
M	δM_1													—	—	—	—	=	=	=	=	=
	δM_2													—	—	—	—	=	=	=	=	=
	δM_3													—	—	—	—	=	=	=	=	=
	δM_4													—	—	—	—	=	=	=	=	=

längs der Kanten unter Berücksichtigung der an den Binderscheiben vorgeschriebenen Randbedingungen in Übereinstimmung zu bringen, ist die Lösung gegeben. Sie wird auf die Berechnung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt. Die vier überzähligen Schnittkräfte eines Punktes J rufen an den anliegenden Schnittufern k und i der benachbarten Kanten H und K Verschiebungen δ_{H_1}, δ_{H_2}, δ_{H_3}, δ_{H_4} bzw. δ_{K_1}, δ_{K_2}, δ_{K_3}, δ_{K_4} hervor, so daß damit zur Berechnung ein zwölfgliedriges System von linearen Gleichungen aufzulösen ist, was bei den heutigen Hilfsmitteln keine Schwierigkeiten bereitet. Im Falle des Tragwerkes nach Abb. 1 ist das Gleichungssystem nachstehend angegeben. In der Matrix sind die Doppelstriche gleichbedeutend mit der Summe der Verschiebungen von zwei Schnittufern. Die einfachen Striche besagen, daß nur der Anteil eines Ufers i oder k zu berücksichtigen ist.

4. Vor- und Belastungszahlen. Zur Berechnung der Vor- und Belastungszahlen werden in Abb. 5 die Schnittkräfte und die Komponenten des Verschiebungszustandes definiert.

An den Schnittufern i und k wirken längs der Kanten in Richtung x die in Abb. 5 definierten Schnittkräfte M_{yx}, N_{yy}, $\bar{Q}_{yz} = Q_{yz} + M_{yx/x}$, N_{yx} sowie die Verschiebungen ϑ_{yx}, v_{yy}, v_{zz}, v_{xx}.

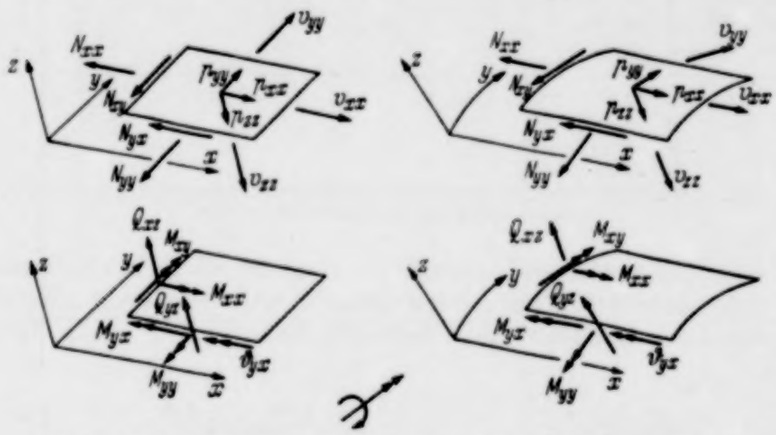

Abb. 5. Positive Definition der Schnittkräfte und Verschiebungen am Platten- und Schalenelement.

a) Vorzahlen. Eine Belastung

$$M_{yx} = 1\,, \quad N_{yy} = 1\,,$$
$$\bar{Q}_{yz} = 1\,, \quad N_{yx} = 1$$

an einem Schnittufer einer Platte oder einer Zylinderschale bewirkt am gleichen Rande 0 Verschiebungen $\overset{0}{R}_{..}$ und am gegenüberliegenden Rande 1 Verschiebungen $\overset{1}{R}_{..}$, die nachfolgend definiert sind. Dabei sind alle übrigen an den Rändern 0 und 1 heraustretenden Schnittkräfte Null.

Die an einem Ufer angreifende Belastung bewirkt Verschiebungen

	am gleichen Ufer:	am gegenüberl. Ufer:
$M_{yx} = 1$:	$\overset{0}{R}_{11} = + E\,\vartheta_{yx}$,	$\overset{1}{R}_{11} = - E\,\vartheta_{yx}$,
	$\overset{0}{R}_{31} = + E\,v_{zz}$,	$\overset{1}{R}_{31} = + E\,v_{zz}$,
$N_{yy} = 1$:	$\overset{0}{R}_{22} = + E\,v_{yy}$,	$\overset{1}{R}_{22} = - E\,v_{yy}$,
	$\overset{0}{R}_{42} = + E\,v_{xx}$,	$\overset{1}{R}_{42} = + E\,v_{xx}$,
$\bar{Q}_{yz} = 1$:	$\overset{0}{R}_{13} = + E\,\vartheta_{yx}$,	$\overset{1}{R}_{13} = - E\,\vartheta_{yx}$,
	$\overset{0}{R}_{33} = + E\,v_{zz}$,	$\overset{1}{R}_{33} = + E\,v_{zz}$,
$N_{yx} = 1$:	$\overset{0}{R}_{24} = + E\,v_{yy}$,	$\overset{1}{R}_{24} = - E\,v_{yy}$,
	$\overset{0}{R}_{44} = + E\,v_{xx}$,	$\overset{1}{R}_{44} = + E\,v_{xx}$.

(1)

Zwischen den Verschiebungen nach Abb. 4 und Abb. 5 bestehen die Beziehungen

am Ufer i:	am Ufer k:
$\delta_1 = + E\,\vartheta_{yx}$,	$\delta_1 = + E\,\vartheta_{yx}$,
$\delta_2 = - E\,v_{yy}\cos\varphi + E\,v_{zz}\sin\varphi$,	$\delta_2 = - E\,v_{yy}\cos\varphi + E\,v_{zz}\sin\varphi$,
$\delta_3 = + E\,v_{yy}\sin\varphi + E\,r_{zz}\cos\varphi$,	$\delta_3 = - E\,v_{yy}\sin\varphi - E\,v_{zz}\cos\varphi$,
$\delta_4 = - E\,v_{xx}$,	$\delta_4 = + E\,v_{xx}$.

(2)

Die Einheiten der überzähligen Größen X_J (nach Abb. 4) nacheinander wirkend liefern nach Abb. 5 an den Schnittufern die Randbelastungen

		am Ufer i:	am Ufer k:
$X_{J_1} = 1$	liefert	$M_{yx} = +1$, $N_{yy} = 0$, $\bar{Q}_{yz} = 0$, $N_{yx} = 0$,	$M_{yx} = +1$, $N_{yy} = 0$, $\bar{Q}_{yz} = 0$, $N_{yx} = 0$,
$X_{J_2} = 1$	liefert	$M_{yx} = 0$, $N_{yy} = +\cos\varphi$, $\bar{Q}_{yz} = -\sin\varphi$, $N_{yx} = 0$,	$M_{yx} = 0$, $N_{yy} = +\cos\varphi$, $\bar{Q}_{yz} = -\sin\varphi$, $N_{yx} = 0$,
$X_{J_3} = 1$	liefert	$M_{yx} = 0$, $N_{yy} = -\sin\varphi$, $\bar{Q}_{yz} = -\cos\varphi$, $N_{yx} = 0$,	$M_{yx} = 0$, $N_{yy} = +\sin\varphi$, $\bar{Q}_{yz} = +\cos\varphi$, $N_{yx} = 0$,
$X_{J_4} = 1$	liefert	$M_{yx} = 0$, $N_{yy} = 0$, $\bar{Q}_{yz} = 0$, $N_{yx} = +1$,	$M_{yx} = 0$, $N_{yy} = 0$, $\bar{Q}_{yz} = 0$, $N_{yx} = -1$.

(3)

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergeben sich unter Beachtung der Randwerte (1) zwangsläufig die Anteile der Vorzahlen an den Schnittufern i und k. Sie sind nachfolgend zusammengestellt.

II. Vorzahlen.

	Die Überzähligen X_{Jj} am Ufer i wirkend liefern die Verschiebungen δ_{Jkj} am Ufer i:	Die Überzähligen X_{Jj} am Ufer k wirkend liefern die Verschiebungen δ_{Jkj} am Ufer k:
$X_{J_1} = 1$:	$\delta_{J_{11}} = +\overset{0}{R}_{11}$, $\delta_{J_{21}} = +\overset{0}{R}_{31}\sin\varphi$, $\delta_{J_{31}} = +\overset{0}{R}_{31}\cos\varphi$, $\delta_{J_{41}} = 0$,	$\delta_{J_{11}} = +\overset{0}{R}_{11}$, $\delta_{J_{21}} = +\overset{0}{R}_{31}\sin\varphi$, $\delta_{J_{31}} = -\overset{0}{R}_{31}\cos\varphi$, $\delta_{J_{41}} = 0$,
$X_{J_2} = 1$:	$\delta_{J_{12}} = -\overset{0}{R}_{13}\sin\varphi$, $\delta_{J_{22}} = -\left(+\overset{0}{R}_{22}\cos^2\varphi + \overset{0}{R}_{33}\sin^2\varphi\right)$, $\delta_{J_{32}} = -\sin\varphi\cos\varphi\left(-\overset{0}{R}_{22} + \overset{0}{R}_{33}\right)$, $\delta_{J_{42}} = -\overset{0}{R}_{42}\cos\varphi$,	$\delta_{J_{12}} = -\overset{0}{R}_{13}\sin\varphi$, $\delta_{J_{22}} = -\left(\overset{0}{R}_{22}\cos^2\varphi + \overset{0}{R}_{33}\sin^2\varphi\right)$, $\delta_{J_{32}} = +\sin\varphi\cos\varphi\left(-\overset{0}{R}_{22} + \overset{0}{R}_{33}\right)$, $\delta_{J_{42}} = +\overset{0}{R}_{42}\cos\varphi$,
$X_{J_3} = 1$:	$\delta_{J_{13}} = -\overset{0}{R}_{13}\cos\varphi$, $\delta_{J_{23}} = -\sin\varphi\cos\varphi\left(-\overset{0}{R}_{22} + \overset{0}{R}_{33}\right)$, $\delta_{J_{33}} = -\left(+\overset{0}{R}_{22}\sin^2\varphi + \overset{0}{R}_{33}\cos^2\varphi\right)$, $\delta_{J_{43}} = +\overset{0}{R}_{42}\sin\varphi$,	$\delta_{J_{13}} = +\overset{0}{R}_{13}\cos\varphi$, $\delta_{J_{23}} = +\sin\varphi\cos\varphi\left(-\overset{0}{R}_{22} + \overset{0}{R}_{33}\right)$, $\delta_{J_{33}} = -\left(\overset{0}{R}_{22}\sin^2\varphi + \overset{0}{R}_{33}\cos^2\varphi\right)$, $\delta_{J_{43}} = +\overset{0}{R}_{42}\sin\varphi$,
$X_{J_4} = 1$:	$\delta_{J_{14}} = 0$, $\delta_{J_{24}} = -\overset{0}{R}_{24}\cos\varphi$, $\delta_{J_{34}} = +\overset{0}{R}_{24}\sin\varphi$, $\delta_{J_{44}} = -\overset{0}{R}_{44}$,	$\delta_{J_{14}} = 0$, $\delta_{J_{24}} = +\overset{0}{R}_{24}\cos\varphi$, $\delta_{J_{34}} = +\overset{0}{R}_{24}\sin\varphi$, $\delta_{J_{44}} = -\overset{0}{R}_{44}$.

III. Vorzahlen.

	Die Überzähligen X_{Jj} am Ufer k wirkend liefern die Verschiebungen δ_{Khj} am Ufer i:	Die Überzähligen X_{Jj} am Ufer i wirkend liefern die Verschiebungen δ_{Hhj} am Ufer k:
$X_{J_1}=1:$	$\delta_{K_{11}} = +\overset{1}{R}_{11}$,	$\delta_{H_{11}} = +\overset{1}{R}_{11}$,
	$\delta_{K_{21}} = +\overset{1}{R}_{31}\sin\varphi$,	$\delta_{H_{21}} = +\overset{1}{R}_{31}\sin\varphi$,
	$\delta_{K_{31}} = +\overset{1}{R}_{31}\cos\varphi$,	$\delta_{H_{31}} = -\overset{1}{R}_{31}\cos\varphi$,
	$\delta_{K_{41}} = 0$,	$\delta_{H_{41}} = 0$,
$X_{J_2}=1:$	$\delta_{K_{12}} = -\overset{1}{R}_{13}\sin\varphi$,	$\delta_{H_{12}} = -\overset{1}{R}_{13}\sin\varphi$,
	$\delta_{K_{22}} = -\left(+\overset{1}{R}_{22}\cos^2\varphi + \overset{1}{R}_{33}\sin^2\varphi\right)$,	$\delta_{H_{22}} = -\left(+\overset{1}{R}_{22}\cos^2\varphi + \overset{1}{R}_{33}\sin^2\varphi\right)$,
	$\delta_{K_{32}} = -\sin\varphi\cos\varphi\left(-\overset{1}{R}_{22}+\overset{1}{R}_{33}\right)$,	$\delta_{H_{32}} = +\sin\varphi\cos\varphi\left(-\overset{1}{R}_{22}+\overset{1}{R}_{33}\right)$,
	$\delta_{K_{42}} = -\overset{1}{R}_{42}\cos\varphi$,	$\delta_{H_{42}} = +\overset{1}{R}_{42}\cos\varphi$,
$X_{J_3}=1:$	$\delta_{K_{13}} = +\overset{1}{R}_{13}\cos\varphi$,	$\delta_{H_{13}} = -\overset{1}{R}_{13}\cos\varphi$,
	$\delta_{K_{23}} = +\sin\varphi\cos\varphi\left(-\overset{1}{R}_{22}+\overset{1}{R}_{33}\right)$,	$\delta_{H_{23}} = -\sin\varphi\cos\varphi\left(-\overset{1}{R}_{22}+\overset{1}{R}_{33}\right)$,
	$\delta_{K_{33}} = +\left(+\overset{1}{R}_{22}\sin^2\varphi + \overset{1}{R}_{33}\cos^2\varphi\right)$,	$\delta_{H_{33}} = +\left(+\overset{1}{R}_{22}\sin^2\varphi + \overset{1}{R}_{33}\cos^2\varphi\right)$,
	$\delta_{K_{43}} = -\overset{1}{R}_{42}\sin\varphi$,	$\delta_{H_{43}} = -\overset{1}{R}_{42}\sin\varphi$,
$X_{J_4}=1:$	$\delta_{K_{14}} = 0$,	$\delta_{H_{14}} = 0$,
	$\delta_{K_{24}} = +\overset{1}{R}_{24}\cos\varphi$,	$\delta_{H_{24}} = -\overset{1}{R}_{24}\cos\varphi$,
	$\delta_{K_{34}} = -\overset{1}{R}_{24}\sin\varphi$,	$\delta_{H_{34}} = -\overset{1}{R}_{24}\sin\varphi$,
	$\delta_{K_{44}} = +\overset{1}{R}_{44}$.	$\delta_{H_{44}} = +\overset{1}{R}_{44}$.

b) Belastungszahlen. Der Verschiebungszustand infolge einer Flächenbelastung wird in dem Koordinatensystem am Ufer i beschrieben. Entsprechend den Gleichungen (1) werden die Randwerte $\overset{0}{R}\,..$ und $\overset{1}{R}\,..$ für die Einheitsbelastungen der Komponenten p_{yy} und p_{zz} definiert.

Die Flächenbelastung bewirkt an den Ufern i und k Verschiebungen:

Belastung	Wirkung am Ufer i:	Wirkung am Ufer k:
$p_{yy}=1:$	$\overset{0}{R}_{20} = +E\,v_{yy}$,	$\overset{1}{R}_{20} = -E\,v_{yy}$,
	$\overset{0}{R}_{40} = +E\,v_{xx}$,	$\overset{1}{R}_{40} = +E\,v_{xx}$,
$p_{zz}=1:$	$\overset{0}{R}_{10} = +E\,\vartheta_{yx}$,	$\overset{1}{R}_{10} = -E\,\vartheta_{yx}$,
	$\overset{0}{R}_{30} = +E\,v_{zz}$,	$\overset{1}{R}_{30} = +E\,v_{zz}$.

(4)

Damit können die Belastungszahlen für die Schnittufer i und k des Gleichungssystems berechnet werden. Unter Beachtung von (2) ergibt sich

am Ufer i:	am Ufer k:
$\delta_{J_{10}} = +\overset{0}{R}_{10}$,	$\delta_{H_{10}} = +\overset{1}{R}_{10}$,
$\delta_{J_{20}} = +\left(-\overset{0}{R}_{20}\cos\varphi + \overset{0}{R}_{30}\sin\varphi\right)$,	$\delta_{H_{20}} = +\left(-\overset{1}{R}_{20}\cos\varphi + \overset{1}{R}_{30}\sin\varphi\right)$,
$\delta_{J_{30}} = +\left(+\overset{0}{R}_{20}\sin\varphi + \overset{0}{R}_{30}\cos\varphi\right)$,	$\delta_{H_{30}} = -\left(+\overset{1}{R}_{20}\sin\varphi + \overset{1}{R}_{30}\cos\varphi\right)$,
$\delta_{J_{40}} = -\overset{0}{R}_{40}$,	$\delta_{H_{40}} = +\overset{1}{R}_{40}$.

(5)

Mit der Ermittlung der Vor- und Belastungszahlen des Gleichungssystems ist die Lösung des zusammengesetzten Tragwerks in allgemeiner Form gegeben.

5. Symmetriebetrachtungen. Bei der Aufstellung der Matrix und zur Abkürzung der Berechnung sind Symmetriebetrachtungen von Nutzen. Ist der Spannungszustand aus einer Flächen-

belastung zur Achse $y = +a/2$ symmetrisch, dann bestehen, wie man aus der Abb. 4 ablesen kann zwischen den Randwerten $\overset{0}{R}\,..$ und $\overset{1}{R}\,..$ die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} +\overset{0}{R}_{10} &= +\overset{1}{R}_{10}\,, \\ +\overset{0}{R}_{20} &= +\overset{1}{R}_{20}\,, \\ +\overset{0}{R}_{30} &= +\overset{1}{R}_{30}\,, \\ +\overset{0}{R}_{40} &= +\overset{1}{R}_{40}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Im Falle eines zur Mittelfläche antimetrischen Spannungszustandes gilt entsprechend

$$\left.\begin{aligned} +\overset{0}{R}_{10} &= -\overset{1}{R}_{10}\,, \\ +\overset{0}{R}_{20} &= -\overset{1}{R}_{20}\,, \\ +\overset{0}{R}_{30} &= -\overset{1}{R}_{30}\,, \\ +\overset{0}{R}_{40} &= -\overset{1}{R}_{40}\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Für eine im Raume liegende Platte mit beliebig geneigter Achse y kann der Dehnungsspannungszustand antimetrisch, der Biegespannungszustand symmetrisch eintreten. Dann gelten für die Beziehungen am Ufer k in Gleichung (5) unter Beachtung der Gleichungen (6) und (7) auch die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \delta_{H_{10}} &= +\overset{0}{R}_{10}\,, \\ \delta_{H_{20}} &= +\left(+\overset{0}{R}_{20}\cos\varphi + \overset{0}{R}_{30}\sin\varphi\right), \\ \delta_{H_{30}} &= -\left(-\overset{0}{R}_{20}\sin\varphi + \overset{0}{R}_{30}\cos\varphi\right), \\ \delta_{H_{40}} &= -\overset{0}{R}_{40}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Betrachtet man ein im Querschnitt symmetrisches Tragwerk, dessen Symmetrieachse in der Mitte einer Platte oder einer Zylinderschale liegt, so gelten für die an den Schnittufern k und i der Kanten J und K angreifenden Überzähligen nach Abb. 4 die folgenden Gleichungen:

bei symmetrischer Belastung

$$\left.\begin{aligned} X_{K_1} &= +X_{J_1}\,, \\ X_{K_2} &= +X_{J_2}\,, \\ X_{K_3} &= -X_{J_3}\,, \\ X_{K_4} &= -X_{J_4}\,, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

bei antimetrischer Belastung:

$$\left.\begin{aligned} X_{K_1} &= -X_{J_1}\,, \\ X_{K_2} &= -X_{J_2}\,, \\ X_{K_3} &= +X_{J_3}\,, \\ X_{K_4} &= +X_{J_4}\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Fällt die Symmetrieachse des Tragwerkes mit einer Kante J zusammen, dann werden die vier Überzähligen X_J am Ufer so bestimmt, daß für symmetrische Belastung die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \delta_{J_1} &= 0\,, \\ \delta_{J_2} &= 0\,, \\ X_{J_3} &= 0\,, \\ X_{J_4} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und für antimetrische Belastung die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} X_{J_1} &= 0\,, \\ X_{J_2} &= 0\,, \\ \delta_{J_3} &= 0\,, \\ \delta_{J_4} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

erfüllt sind.

Die strenge Theorie des in Abb. 1 dargestellten Tragwerkes ist somit auf die Berechnung der Randverschiebungen $\overset{0}{R}\,..$ und $\overset{1}{R}\,..$ für Einheitslasten

$$M_{yx} = 1\,, \qquad N_{yy} = 1\,, \qquad \bar{Q}_{yz} = 1\,, \qquad N_{yx} = 1$$

und für die Flächenbelastung

$$p_{yy} = 1\,, \qquad p_{zz} = 1$$

zurückgeführt worden. Zur Ermittlung dieser Verschiebungen stehen die bekannten Theorien der anisotropen Scheiben, Platten und Zylinderschalen sowie die Theorie der Stäbe zur Verfügung.

Für die hier am meisten interessierenden isotropen Scheiben und Platten soll die Berechnung der Randverschiebungen durchgeführt werden, da sich in diesem Falle die Rechnung allgemein bis zu expliziten Werten $\overset{0}{R}\,..$ und $\overset{1}{R}\,..$ durchführen läßt.

6. Das isotrope Faltwerk zwischen Endbindern. Zur Berechnung der isotropen Faltwerke stehen für die Dehnungs- und für die Biegespannungen die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\Delta F = 0\,, \qquad \Delta\Delta v_{zz} = \frac{12\,(1-\nu^2)}{E\,h^3}\,p_{zz}(x\,y) \\ \text{mit} \qquad &\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \equiv {}_{\cdot|xx} + {}_{\cdot|yy} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

zur Verfügung. Die in Abb. 5 definierten Schnittgrößen und Verschiebungen ergeben sich aus der Spannungsfunktion F und aus der Normalverschiebung v_{zz} in der bekannten Weise:

$$\left.\begin{aligned} N_{xx} &= +F_{|yy}\,, & M_{xy} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\,(+v_{zz|xx} + \nu\,v_{zz|yy})\,, \\ N_{yy} &= +F_{|xx}\,, & M_{yx} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\,(+\nu\,v_{zz|xx} + v_{zz|yy})\,, \\ N_{xy} &= N_{yx} = -F_{|xy} - \int p_{yy}(x)\,dx\,, & M_{xx} &= M_{yy} = -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\,(1-\nu)\,v_{zz|xy}\,, \\ E\,h\,\varepsilon_{xx} &= v_{xx|x} = +F_{|yy} - \nu\,F_{|xx}\,, & Q_{xz} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\,\Delta v_{zz|x}\,, \\ E\,h\,\varepsilon_{yy} &= v_{yy|y} = +F_{|xx} - \nu\,F_{|yy}\,, & Q_{yz} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\,\Delta v_{zz|y}\,, \\ E\,h\,\gamma_{xy} &= +v_{xx|y} + v_{yy|x} \\ &= -2\,(1+\nu)\,F_{|xy}\,, & \bar{Q}_{xz} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\,(+v_{zz|xxx} \\ & & & \qquad + (2-\nu)\,v_{zz|xyy})\,, \\ & & \bar{Q}_{yz} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\,(+v_{zz|xxy}\,(2-\nu) \\ & & & \qquad + v_{zz|yyy})\,, \\ & & E\,\vartheta_{yx} &= +E\,v_{zz|y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Der Verlauf der Belastungskomponenten in der x-Richtung wird durch unendliche Reihen dargestellt:

$$p_{yy} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{yn}\cos\frac{n\,\pi\,x}{L}\,, \qquad p_{zz} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{zn}\cos\frac{n\,\pi\,x}{L}\,. \tag{15}$$

Als Lösungen der Differentialgleichungen (13) eignen sich im Sinne von (15) die Funktionen

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)\cos\frac{n\,\pi\,x}{L}\,, \qquad v_{zz} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(y)\cos\frac{n\,\pi\,x}{L}\,. \tag{16}$$

Für eine zweckmäßige Durchführung der Lösung werden die folgenden Abkürzungen und dimensionslosen Koordinaten eingeführt.

$$\lambda = \frac{n\,\pi\,a}{L}\,, \qquad \xi = \frac{\lambda\,x}{a}\,, \qquad \eta = \frac{\lambda\,y}{a}\,, \qquad \varphi = \frac{\lambda\,f_n}{a}\,, \qquad \omega = \frac{\lambda\,w_n}{a}\,, \qquad \varkappa = \frac{h^2}{12\,a^2}\,. \tag{17}$$

Mit den Gleichungen (16) u. (17) ergeben sich für die Schnittkräfte (14) die nachfolgenden Beziehungen (Striche bedeuten Abteitungen nach η, die Summenzeichen sind nicht geschrieben):

$$
\left.\begin{aligned}
N_{xx} &= +\frac{\lambda}{a}\varphi''\cos\xi\,, & M_{yx} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\frac{\lambda}{a}(-\nu\,\omega+\omega'')\cos\xi\,,\\
N_{yy} &= -\frac{\lambda}{a}\varphi\cos\xi\,, & M_{xy} &= +\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\frac{\lambda}{a}(+\omega-\nu\,\omega'')\cos\xi\,,\\
N_{yx} &= +\left(+\frac{\lambda}{a}\varphi'-\frac{a}{\lambda}\,p_{yn}\right)\sin\xi\,, & M_{yy} &= +\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\frac{\lambda}{a}(1-\nu)\,\omega'\sin\xi\,,\\
E\,h\,\varepsilon_{xx} &= +\frac{\lambda}{a}(+\varphi''+\nu\,\varphi)\cos\xi\,, & Q_{xz} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\frac{\lambda^2}{a^2}(+\omega-\omega'')\sin\xi\,,\\
E\,h\,\varepsilon_{yy} &= -\frac{\lambda}{a}(+\varphi+\nu\,\varphi'')\cos\xi\,, & Q_{yz} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\frac{\lambda^2}{a^2}(-\omega'+\omega''')\cos\xi\,,\\
& & Q_{xz} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\frac{\lambda^2}{a^2}(+\omega-\omega'\,(2-\nu))\\
& & & \qquad\times\sin\xi\,,\\
& & \bar{Q}_{yz} &= -\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\frac{\lambda^2}{a^2}[-\omega'\,(2-\nu)\\
& & & \qquad+\omega''']\cos\xi\,,\\
& & E\,\vartheta &= +E\,\omega'\,.
\end{aligned}\right\}\tag{18}
$$

Für die Funktionen φ und ω ergeben sich wegen der Doppelwurzeln der charakteristischen Gleichungen die Lösungen

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi &= +\frac{a}{\lambda}\{+e^{+\eta}[A_1+A_2(\eta+0)]+e^{-\eta}[A_3+A_4(\eta+0)]\}\,,\\
\omega &= +\frac{a\,12\,(1-\nu^2)}{\lambda\,E\,h^3}\{+e^{+\eta}[B_1+B_2(\eta+0)]+e^{-\eta}[B_3+B_4(\eta+0)]\}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{19}
$$

Setzt man die Funktionen (19) und ihre Ableitungen in die Gleichungen (18) ein, so sind die Schnittkräfte und Verschiebungen als Funktion der Koordinaten ξ, η und der Integrationskonstanten A_i, B_i $(i=1\ldots4)$ gegeben:

$$
\left.\begin{aligned}
N_{xx} &= +\{+e^{+\eta}[+A_1+A_2(\eta+2)]+e^{-\eta}[+A_3+A_4(\eta-2)]\}\cos\xi\,,\\
N_{yy} &= -\{+e^{+\eta}[+A_1+A_2\cdot\eta]+e^{-\eta}[+A_3+A_4\,\eta]\}\cos\xi\,,\\
N_{xy} &= +\{+e^{+\eta}[+A_1+A_2(\eta+1)]+e^{-\eta}[-A_3+A_4(-\eta+1)]\}\sin\xi\,,\\
M_{yx} &= -\{+e^{+\eta}[+B_1(1-\nu)+B_2(+\eta(1-\nu)+2)]+e^{-\eta}[+B_3(1-\nu)\\
&\qquad+B_4(+\eta(1-\nu)-2)]\}\cos\xi\,,\\
M_{xy} &= +\{+e^{+\eta}[+B_1(1-\nu)+B_2(+\eta(1-\nu)-2\nu)]+e^{-\eta}[+B_3(1-\nu)\\
&\qquad+B_4(+\eta(1-\nu)+2\nu)]\}\cos\xi\,,\\
M_{xx} &= +(1-\nu)\{+e^{+\eta}[+B_1+B_2(+\eta+1)]\\
&\qquad+e^{-\eta}[-B_3+B_4(-\eta+1)]\}\sin\xi\,,\\
Q_{xz} &= +\frac{2\,\lambda}{a}\{+e^{+\eta}B_2-e^{-\eta}B_4\}\sin\xi\,,\\
Q_{yz} &= -\frac{2\,\lambda}{a}\{+e^{+\eta}B_2+e^{-\eta}B_4\}\cos\xi\,,\\
\bar{Q}_{xz} &= +\frac{\lambda}{a}\{+e^{+\eta}[+B_1(1-\nu)+B_2(+\eta(1-\nu)+2(2-\nu))]\\
&\qquad+e^{-\eta}[+B_3(1-\nu)+B_4(+\eta(1-\nu)-2(2-\nu))]\}\sin\xi\,,\\
\bar{Q}_{yz} &= +\frac{\lambda}{a}\{+e^{+\eta}[+B_1(1-\nu)+B_2(+\eta(1-\nu)-(1+\nu))]\\
&\qquad-e^{-\eta}[+B_3(1-\nu)+B_4(+\eta(1-\nu)+(1+\nu))]\}\cos\xi\,,\\
E\,v_{xx} &= +\frac{a}{h\,\lambda}\{+e^{+\eta}[+A_1(1+\nu)+A_2\{+\eta(1+\nu)+2\}]\\
&\qquad+e^{-\eta}[+A_3(1+\nu)+A_4\{+\eta(1+\nu)-2\}]\}\sin\xi\,,\\
E\,v_{yy} &= -\frac{a}{\lambda}\{+e^{+\eta}[+A_1(1+\nu)+A_2\{+\eta(1+\nu)-(1-\nu)\}]\\
&\qquad+e^{-\eta}[-A_3(1+\nu)+A_4\{-\eta(1+\nu)-(1-\nu)\}]\}\cos\xi\,,\\
E\,v_{zz} &= +\frac{(1-\nu^2)}{h\cdot\varkappa\cdot a^2}\{+e^{+\eta}[+B_1+B_2\eta]+e^{-\eta}[+B_3+B_4\eta]\}\cos\xi\,,\\
E\,\vartheta_{yx} &= +\frac{(1-\nu^2)}{h\,\lambda\,a\,\varkappa}\{+e^{+\eta}[+B_1+B_2(\eta+1)]+e^{-\eta}[-B_3+B_4(-\eta+1)]\}\cos\xi\,.
\end{aligned}\right\}\tag{20}
$$

Die Bedingungen an den Rändern 0 und 1 der Scheiben bzw. Platten sind im Sinne von (1) festgelegt:

$$\left.\begin{array}{lll}
1.\ \eta = 0 & : & N_{yy} = 1\,, \quad N_{yx} = 0\,, \\
\eta = \lambda & : & N_{yy} = 0\,, \quad N_{yx} = 0\,, \\
2.\ \eta = 0 & : & N_{yy} = 0\,, \quad N_{yx} = 1\,, \\
\eta = \lambda & : & N_{yy} = 0\,, \quad N_{yx} = 0\,, \\
3.\ \eta = 0 & : & M_{yx} = 1\,, \quad \bar{Q}_{yz} = 0\,, \\
\eta = \lambda & : & M_{yx} = 0\,, \quad \bar{Q}_{yz} = 0\,, \\
4.\ \eta = 0 & : & M_{yx} = 0\,, \quad \bar{Q}_{yz} = 1\,, \\
\eta = \lambda & : & M_{yx} = 0\,. \quad \bar{Q}_{yz} = 0\,.
\end{array}\right\} \qquad (21)$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen 1. und 2. in (21) ergibt sich für die Integrationskonstanten A_i $(i = 1 \ldots 4)$ das Gleichungssystem:

A_1	A_2	A_3	A_4	
$+1$	0	$+1$	0	$-N_{yy}$
$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+N_{yx}$
$+e^{+\lambda}$	$+\lambda e^{+\lambda}$	$+e^{-\lambda}$	$+\lambda e^{-\lambda}$	0
$+e^{+\lambda}$	$+(1+\lambda)e^{+\lambda}$	$-e^{-\lambda}$	$+(1-\lambda)e^{-\lambda}$	0

Die Forderungen 3. und 4. in (21) bedingen das nachstehende Gleichungssystem zur Berechnung der Integrationskonstanten B_i $(i = 1 \ldots 4)$:

B_1	B_2	B_3	B_4	
$+(1-\nu)$	$+2$	$+(1-\nu)$	-2	$-M_{yx}$
$+(1-\nu)$	$-(1+\nu)$	$-(1-\nu)$	$-(1+\nu)$	$+\frac{a}{\lambda}\bar{Q}_{yz}$
$+(1-\nu)e^{+\lambda}$	$+[\lambda(1-\nu)+2]e^{+\lambda}$	$+(1-\nu)e^{-\lambda}$	$+[\lambda(1-\nu)-2]e^{-\lambda}$	0
$+(1-\nu)e^{+\lambda}$	$+[\lambda(1-\nu)-(1+\nu)]e^{+\lambda}$	$-(1-\nu)e^{-\lambda}$	$-[\lambda(1+\nu)+(1+\nu)]e^{-\lambda}$	0

Die Auflösung der Gleichungssysteme liefert für die Bedingungen (21) die folgenden Lösungen (22) für die unbekannten Konstanten:

$$\left.\begin{array}{ll}
1.\ N_{yy} = 1: & 2.\ N_{yx} = 1: \\
A_1 = +\frac{1}{4\,\Delta_1}(+2\lambda^2 + \alpha_1)\,, & A_1 = -\frac{1}{4\,\Delta_1}2\lambda^2\,, \\
A_2 = -\frac{1}{4\,\Delta_1}\alpha_1\,, & A_2 = +\frac{1}{4\,\Delta_1}\beta_1\,, \\
A_3 = +\frac{1}{4\,\Delta_1}(+2\lambda^2 - \alpha_2)\,, & A_3 = +\frac{1}{4\,\Delta_1}2\lambda^2\,, \\
A_4 = -\frac{1}{4\,\Delta_1}\alpha_2\,, & A_4 = -\frac{1}{4\,\Delta_1}\beta_2\,, \\
3.\ M_{yx} = 1: & 4.\ \bar{Q}_{yz} = 1: \\
B_1 = -\frac{1}{4(1-\nu)\,\Delta_2}\left(-\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_3 + \alpha_4\right), & B_1 = +\frac{a}{4\lambda(1-\nu)\,\Delta_2}\left(+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_3 + \beta_4\right), \\
B_2 = -\frac{1}{2(1-\nu)\,\Delta_2}\alpha_4\,, & B_2 = -\frac{a}{2\lambda(1-\nu)\,\Delta_2}\beta_4\,, \\
B_3 = -\frac{1}{4(1-\nu)\,\Delta_2}\left(+\alpha_3 - \frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_4\right), & B_3 = +\frac{a}{4\lambda(1-\nu)\,\Delta_2}\left(+\beta_3 + \frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_4\right), \\
B_4 = -\frac{1}{2(1-\nu)\,\Delta_2}\alpha_3\,, & B_4 = +\frac{a}{2\lambda(1-\nu)\,\Delta_2}\beta_3\,.
\end{array}\right\} \qquad (22)$$

Die Abkürzungen in (22) haben die folgende Bedeutung:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= +\lambda e^{+\lambda} + \mathfrak{Sin}\,\lambda\,, & \beta_1 &= +\lambda e^{+\lambda} - \mathfrak{Sin}\,\lambda\,,\\
\alpha_2 &= +\lambda e^{-\lambda} + \mathfrak{Sin}\,\lambda\,, & \beta_2 &= +\lambda e^{-\lambda} - \mathfrak{Sin}\,\lambda\,,\\
\alpha_3 &= +\frac{3+\nu}{1-\nu}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda - \lambda e^{+\lambda}\,, & \beta_3 &= +\frac{3+\nu}{1-\nu}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda + \lambda e^{+\lambda}\,,\\
\alpha_4 &= +\frac{3+\nu}{1-\nu}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda - \lambda e^{-\lambda}\,, & \beta_4 &= +\frac{3+\nu}{1-\nu}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda + \lambda e^{-\lambda}\,,\\
\Delta_1 &= +\mathfrak{Sin}^2\lambda - \lambda^2\,. & \Delta_2 &= +\left(\frac{3+\nu}{1-\nu}\right)^2\mathfrak{Sin}^2\lambda - \lambda^2\,.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Mit den festgelegten Konstanten können nun aus (20) die Gleichungen der Schnittkräfte und Verschiebungen für die Randbelastungszustände

$$N_{yy} = 1\,, \quad N_{yx} = 1\,, \quad M_{yx} = 1\,, \quad \bar{Q}_{yx} = 1$$

berechnet werden:

$N_{yy} = 1$:

$$\left.\begin{aligned}
N_{yy} &= -\frac{1}{2\Delta_1}\{+e^{-(\lambda-\eta)}[+\lambda^2 e^{+\lambda} + \alpha_1(1-\eta)] \\
&\qquad + e^{+(\lambda-\eta)}[+\lambda^2 e^{-\lambda} - \alpha_2(1+\eta)]\}\cos\xi\,,\\
N_{xx} &= +\frac{1}{2\Delta_1}\{+e^{-(\lambda-\eta)}[+\lambda^2 e^{+\lambda} - \alpha_1(1+\eta)] \\
&\qquad + e^{+(\lambda-\eta)}[+\lambda^2 e^{-\lambda} + \alpha_2(1-\eta)]\}\cos\xi\,,\\
N_{yx} &= +\frac{1}{2\Delta_1}\{+e^{-(\lambda-\eta)}[+\lambda^2 e^{+\lambda} - \alpha_1\eta] + e^{+(\lambda-\eta)}[-\lambda^2 e^{-\lambda} + \alpha_2\eta]\}\cos\xi\,,\\
E\,v_{yy} &= -\frac{a(1+\nu)}{2h\lambda\Delta_1}\left\{+e^{-(\lambda-\eta)}\left[+\lambda^2 e^{+\lambda} + \alpha_1\left(\frac{2}{1+\nu} - \eta\right)\right]\right. \\
&\qquad \left. + e^{+(\lambda-\eta)}\left[-\lambda^2 e^{-\lambda} + \alpha_2\left(\frac{2}{1+\nu} + \eta\right)\right]\right\}\cos\xi\,,\\
E\,v_{xx} &= +\frac{a(1+\nu)}{2h\lambda\Delta_1}\left\{+e^{-(\lambda-\eta)}\left[+\lambda^2 e^{+\lambda} - \alpha_1\left(+\eta + \frac{1-\nu}{1+\nu}\right)\right]\right. \\
&\qquad \left. + e^{+(\lambda-\eta)}\left[+\lambda^2 e^{-\lambda} - \alpha_2\left(+\eta - \frac{1-\nu}{1+\nu}\right)\right]\right\}\sin\xi\,;
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$N_{yx} = 1$:

$$\left.\begin{aligned}
N_{yy} &= -\frac{1}{2\Delta_1}\{+e^{-(\lambda-\eta)}[-\lambda^2 e^{+\lambda} + \beta_1\eta] + e^{+(\lambda-\eta)}[+\lambda^2 e^{-\lambda} - \beta_2\eta]\}\cos\xi\,,\\
N_{xx} &= +\frac{1}{2\Delta_1}\{+e^{-(\lambda-\eta)}[-\lambda^2 e^{+\lambda} + \beta_1(2+\eta)] \\
&\qquad + e^{+(\lambda-\eta)}[+\lambda^2 e^{-\lambda} + \beta_2(2-\eta)]\}\cos\xi\,,\\
N_{yx} &= +\frac{1}{2\Delta_1}\{+e^{-(\lambda-\eta)}[-\lambda^2 e^{+\lambda} + \beta_1(1+\eta)] \\
&\qquad + e^{+(\lambda-\eta)}[-\lambda^2 e^{-\lambda} - \beta_2(1-\eta)]\}\cos\xi\,,\\
E\,v_{yy} &= -\frac{a(1+\nu)}{2h\lambda\Delta_1}\left\{+e^{-(\lambda-\eta)}\left[-\lambda^2 e^{+\lambda} + \beta_1\left(-\frac{1-\nu}{1+\nu} + \eta\right)\right]\right. \\
&\qquad \left. + e^{+(\lambda-\eta)}\left[-\lambda^2 e^{-\lambda} + \beta_2\left(+\frac{1-\nu}{1+\nu} + \eta\right)\right]\right\}\cos\xi\,,\\
E\,v_{xx} &= +\frac{a(1+\nu)}{2h\lambda\Delta_1}\left\{+e^{-(\lambda-\eta)}\left[-\lambda^2 e^{+\lambda} + \beta_1\left(+\frac{2}{1+\nu} + \eta\right)\right]\right. \\
&\qquad \left. + e^{+(\lambda-\eta)}\left[+\lambda^2 e^{-\lambda} + \beta_2\left(\frac{2}{1+\nu} - \eta\right)\right]\right\}\sin\xi\,;
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$M_{yx} = 1$:

$$
\begin{aligned}
M_{yx} &= +\frac{1}{4\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_3+\alpha_4\Big\{2\,(\lambda-\eta)+\frac{3+\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\\
&\qquad+e^{-(\lambda-\eta)}\Big[-\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_4+\alpha_3\Big\{2\,(\lambda-\eta)-\frac{3+\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\Big\}\cos\xi\,,\\
M_{xy} &= -\frac{1}{4\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_3+\alpha_4\Big\{2\,(\lambda-\eta)-\frac{1+3\,\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\\
&\qquad+e^{-(\lambda-\eta)}\Big[-\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_4+\alpha_3\Big\{2\,(\lambda-\eta)+\frac{1+3\,\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\Big\}\cos\xi\,,\\
M_{xx} &= +\frac{1}{4\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_3+\alpha_4\Big\{2\,(\lambda-\eta)+1\Big\}\Big]\\
&\qquad+e^{-(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_4-\alpha_3\{2\,(\lambda-\eta)-1\}\Big]\Big\}\sin\xi\,,\\
\bar{Q}_{yz} &= +\frac{\lambda}{4\,a\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_3+\alpha_4\Big\{2\,(\lambda-\eta)-\frac{3+\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\\
&\qquad+e^{-(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_4-\alpha_3\Big\{2\,(\lambda-\eta)+\frac{3+\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\Big\}\cos\xi\,,\\
\bar{Q}_{xz} &= +\frac{\lambda}{4\,a\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_3+\alpha_4\Big\{2\,(\lambda-\eta)+\frac{7-3\,\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\\
&\qquad+e^{-(\lambda-\eta)}\Big[-\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_4+\alpha_3\Big\{2\,(\lambda-\eta)-\frac{7-3\,\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\Big\}\sin\xi\,,\\
Q_{yz} &= -\frac{\lambda}{a\,(1-\nu)\,\Delta_2}\{+e^{+(\lambda-\eta)}\,\alpha_4+e^{-(\lambda-\eta)}\,\alpha_3\}\cos\xi\,,\\
Q_{xz} &= +\frac{\lambda}{a\,(1-\nu)\,\Delta_2}\{+e^{+(\lambda-\eta)}\,\alpha_4-e^{-(\lambda-\eta)}\,\alpha_3\}\sin\xi\,,\\
E\,v_{zz} &= -\frac{1+\nu}{4\,h\,\lambda^2\varkappa\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_3+\alpha_4\,\{2\,(\lambda-\eta)-1\}\Big]\\
&\qquad+e^{-(\lambda-\eta)}\Big[-\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_4+\alpha_3\,\{2\,(\lambda-\eta)+1\}\Big]\Big\}\cos\xi\,,\\
E\,\vartheta_{yx} &= +\frac{1+\nu}{4\,h\,\lambda\,a\varkappa\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_3+\alpha_4\,\{2\,(\lambda-\eta)+1\}\Big]\\
&\qquad+e^{-(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\alpha_4-\alpha_3\,\{2\,(\lambda-\eta)-1\}\Big]\Big\}\cos\xi\,;
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$\bar{Q}_{yz} = 1$:

$$
\begin{aligned}
M_{yx} &= +\frac{a}{4\,\lambda\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_3-\beta_4\Big\{2\,(\lambda-\eta)+\frac{3+\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\\
&\qquad+e^{-(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_4+\beta_3\Big\{2\,(\lambda-\eta)-\frac{3+\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\Big\}\cos\xi\,,\\
M_{xy} &= -\frac{a}{4\,\lambda\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_3-\beta_4\Big\{2\,(\lambda-\eta)-\frac{1+3\,\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\\
&\qquad+e^{-(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_4+\beta_3\Big\{2\,(\lambda-\eta)+\frac{1+3\,\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\Big\}\cos\xi\,,\\
M_{xx} &= +\frac{a}{4\,\lambda\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_3-\beta_4\,\{2\,(\lambda-\eta)+1\}\Big]\\
&\qquad-e^{-(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_4+\beta_3\,\{2\,(\lambda-\eta)-1\}\Big]\Big\}\sin\xi\,,\\
\bar{Q}_{yz} &= +\frac{1}{4\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_3-\beta_4\Big\{2\,(\lambda-\eta)-\frac{3+\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\\
&\qquad-e^{-(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_4+\beta_3\Big\{2\,(\lambda-\eta)+\frac{3+\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\Big\}\cos\xi\,,
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{Q}_{xz} &= +\frac{1}{4\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_3-\beta_4\Big\{2\,(\lambda-\eta)+\frac{7-3\,\nu}{1-\nu}\Big\}\Big] \\
&\qquad +e^{-(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_4+\beta_3\Big\{2\,(\lambda-\eta)-\frac{7-3\,\nu}{1-\nu}\Big\}\Big]\Big\}\sin\xi\,, \\
Q_{yz} &= -\frac{1}{(1-\nu)\,\Delta_2}\{-e^{+(\lambda-\eta)}\beta_4+e^{-(\lambda-\eta)}\beta_3\}\cos\xi\,, \\
Q_{xz} &= -\frac{1}{(1-\nu)\,\Delta_2}\{+e^{+(\lambda-\eta)}\beta_4+e^{-(\lambda-\eta)}\beta_3\}\sin\xi\,, \\
E\,v_{zz} &= -\frac{(1+\nu)\,a}{4\,h\,\lambda^3\,\varkappa\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_3-\beta_4\,\{2\,(\lambda-\eta)-1\}\Big] \\
&\qquad +e^{-(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_4+\beta_3\,\{2\,(\lambda-\eta)+1\}\Big]\Big\}\cos\xi\,, \\
E\,\vartheta_{yx} &= +\frac{(1+\nu)}{4\,h\,\lambda^2\,\varkappa\,\Delta_2}\Big\{+e^{+(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_3-\beta_4\,\{2\,(\lambda-\eta)+1\}\Big] \\
&\qquad -e^{-(\lambda-\eta)}\Big[+\frac{3+\nu}{1-\nu}\beta_4+\beta_3\,\{2\,(\lambda-\eta)-1\}\Big]\Big\}\cos\xi\,.
\end{aligned}
\right\} \tag{27}
$$

Für die Flächenbelastung mit den Komponenten

$$p_{yy}=p_{yn}\cos\xi\,,\qquad p_{zz}=p_{zn}\cos\xi$$

gelten die Randbedingungen

$$
\left.
\begin{aligned}
\eta&=0:\\
\eta&=\lambda:
\end{aligned}
\right\}\quad N_{yy}=N_{yx}=M_{yx}=\bar{Q}_{yz}=0\,. \tag{28}
$$

Für die Differentialgleichung (13b) wird noch die Partikularlösung

$$E\,h\,v_{zz}=+p_{zn}\frac{a^2\,(1-\nu^2)}{\lambda^4\,\varkappa}\cos\xi\qquad\text{mit}\qquad\varkappa=\frac{h^2}{12\,a^2} \tag{29}$$

benötigt.

Die Randbedingungen (28) werden erfüllt, wenn die Konstanten A_i und B_i ($i=1\,..\,4$) den folgenden Gleichungssystemen (30) genügen:

A_1	A_2	A_3	A_4	
$+1$	0	$+1$	0	0
$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+\frac{a}{\lambda}p_{yn}$
$+e^{+\lambda}$	$+\lambda\,e^{+\lambda}$	$+e^{-\lambda}$	$+\lambda\,e^{-\lambda}$	0
$+e^{+\lambda}$	$+(1+\lambda)\,e^{+\lambda}$	$-e^{-\lambda}$	$+(1-\lambda)\,e^{-\lambda}$	$+\frac{a}{\lambda}p_{yn}$

B_1	B_2	B_3	B_4	
$+(1-\nu)$	$+2$	$+(1-\nu)$	-2	$+\nu\,p_{zn}\frac{a^2}{\lambda^2}$
$+(1-\nu)$	$-(1+\nu)$	$-(1-\nu)$	$-(1+\nu)$	0
$+(1-\nu)e^{+\lambda}$	$+[\lambda(1-\nu)+2]\,e^{+\lambda}$	$+(1-\nu)$	$+[\lambda\,(1-\nu)-2]\,e^{-\lambda}$	$-\nu\,p_{zn}\frac{a^2}{\lambda^2}$
$+(1-\nu)e^{+\lambda}$	$+[\lambda(\lambda-\nu)-(1+\nu)]e^{+\lambda}$	$-(1-\nu)e^{-\lambda}$	$-[\lambda(1-\nu)+(1+\nu)]e^{-\lambda}$	0

(30)

Die Auflösung der Gleichungssysteme ergibt nach längerer Rechnung die Werte der Integrationskonstanten

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= -A_3 = -p_{yn}\frac{a}{2\,\Delta_3},\\
A_2 &= +p_{yn}\frac{a}{2\,\Delta_3\lambda}\gamma_1,\\
A_4 &= -p_{yn}\frac{a}{2\,\Delta_3\lambda}\gamma_2,\\
B_1 &= +\nu\,p_{zn}\frac{a^2}{2\,\lambda^2(1-\nu)\,\Delta_4}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\gamma_1-\lambda\right),\\
B_2 &= +\nu\,p_{zn}\frac{a^2}{2\,\lambda^2(1-\nu)\,\Delta_4}\gamma_1,\\
B_3 &= -\nu\,p_{zn}\frac{a^2}{2\,\lambda^2(1-\nu)\,\Delta_4}\left(+\frac{1+\nu}{1-\nu}\gamma_2+\lambda\right),\\
B_4 &= +\nu\,p_{zn}\frac{a^2}{2\,\lambda^2(1-\nu)\,\Delta_4}\gamma_2.
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Dabei sind die folgenden Abkürzungen definiert worden:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1 &= +1-e^{-\lambda},\\
\gamma_2 &= +1-e^{+\lambda},\\
\Delta_3 &= +\mathfrak{Sin}\,\lambda-\lambda,\\
\Delta_4 &= +\frac{3+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}\,\lambda-\lambda.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Aus den Gleichungen (20) können mit den Integrationskonstanten (31) und dem partikulären Integral der Plattengleichung (29) die Schnittkräfte für die Flächenbelastung berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned}
N_{yy} &= -p_{yn}\frac{a}{2\,\lambda\,\Delta_3}\{+e^{+\eta}[-\lambda+\gamma_1\eta]+e^{-\eta}[+\lambda+\gamma_2\eta]\}\cos\xi,\\
N_{xx} &= +p_{yn}\frac{a}{2\,\lambda\,\Delta_3}\{+e^{-\eta}[-\lambda+\gamma_1(2+\eta)]+e^{-\eta}[+\lambda+\gamma_2(2-\eta)]\}\cos\xi,\\
N_{yx} &= +p_{yn}\frac{a}{\lambda}\Big\{+\frac{1}{2\,\Delta_3}[+e^{+\eta}\{-\lambda+\gamma_1(1+\eta)\}\\
&\qquad +e^{-\eta}\{-\lambda-\gamma_2(1-\eta)\}]-1\Big\}\sin\xi,\\
E\,v_{yy} &= -p_{yn}\frac{a^2(1+\nu)}{2\,\lambda^2\,\Delta_3}\Big\{+e^{+\eta}\Big[-\lambda+\gamma_1\Big(\eta-\frac{1-\nu}{1+\nu}\Big)\Big]\\
&\qquad +e^{-\eta}\Big[-\lambda+\gamma_2\Big(\eta+\frac{1-\nu}{1+\nu}\Big)\Big]\Big\}\cos\xi,\\
E\,v_{xx} &= +p_{yn}\frac{a^2(1+\nu)}{2\,\lambda^2\,\Delta_3}\Big\{+e^{+\eta}\Big[-\lambda+\gamma_1\Big(\frac{2}{1+\nu}+\eta\Big)\Big]\\
&\qquad +e^{-\eta}\Big[\lambda+\gamma_2\Big(\frac{2}{1+\nu}-\eta\Big)\Big]\Big\}\sin\xi,\\
M_{yx} &= +\nu\,p_{zn}\frac{a^2}{\lambda^2}\Big\{+1-\frac{1}{2\,\Delta_4}\Big[+e^{+\eta}\Big\{+\gamma_1\Big(\frac{3+\nu}{1-\nu}+\eta\Big)-\lambda\Big\}\\
&\qquad -e^{-\eta}\Big\{+\gamma_2\Big(\frac{3+\nu}{1-\nu}-\eta\Big)+\lambda\Big\}\Big]\Big\}\cos\xi,\\
M_{xy} &= +p_{zn}\frac{a^2}{\lambda^2}\Big\{+1+\frac{\nu}{2\,\Delta_4}[+e^{+\eta}\{+\gamma_1(1+\eta)-\lambda\}\\
&\qquad -e^{-\eta}\{+\gamma_2(1-\eta)+\lambda\}]\Big\}\cos\xi,\\
M_{xx} &= +\nu\,p_{zn}\frac{a^2}{2\,\lambda^2\,\Delta_4}\Big\{+e^{+\eta}\Big[+\gamma_1\Big(+\frac{2}{1-\nu}+\eta\Big)-\lambda\Big]\\
&\qquad +e^{-\eta}\Big[+\gamma_2\Big(+\frac{2}{1-\nu}-\eta\Big)+\lambda\Big]\Big\}\sin\xi,\\
Q_{yz} &= -\nu\,p_{zn}\frac{a}{\lambda(1-\nu)\,\Delta_4}\{+e^{+\eta}\gamma_1+e^{-\eta}\gamma_2\}\cos\xi,
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$
\begin{aligned}
Q_{xz} &= +\nu\, p_{zn}\frac{a}{\lambda(1-\nu)\,\Delta_4}\{+e^{+\eta}\gamma_1 - e^{-\eta}\gamma_2\}\sin\xi\,,\\
\bar{Q}_{yz} &= +\nu\, p_{zn}\frac{a}{2\lambda\,\Delta_4}\{+e^{+\eta}(+\gamma_1\eta-\lambda) - e^{-\eta}(+\gamma_2\eta-\lambda)\}\cos\xi\,,\\
\bar{Q}_{xz} &= +\nu\, p_{zn}\frac{a}{2\lambda\,\Delta_4}\Big\{+e^{+\eta}\Big[+\gamma_1\Big(\frac{5+\nu}{1-\nu}+\eta\Big)-\lambda\Big]\\
&\qquad - e^{-\eta}\Big[+\gamma_2\Big(\frac{5-\nu}{1-\nu}-\eta\Big)+\lambda\Big]\Big\}\sin\xi\,,\\
E\,v_{zz} &= +p_{zn}\frac{a^2(1-\nu^2)}{h\lambda^4\varkappa}\Big\{1+\frac{\nu}{2(1-\nu)\,\Delta_4}\Big[e^{+\eta}\Big\{-\lambda+\gamma_1\Big(\frac{1+\nu}{1-\nu}+\eta\Big)\Big\}\\
&\qquad - e^{-\eta}\Big\{+\lambda+\gamma_2\Big(\frac{1+\nu}{1-\nu}-\eta\Big)\Big\}\Big]\Big\}\cos\xi\,,\\
E\,\vartheta_{yx} &= +\nu\, p_{zn}\frac{(1+\nu)\,a}{2h\lambda^3\varkappa\,\Delta_4}\Big\{+e^{+\eta}\Big[-\lambda+\gamma_1\Big(+\frac{2}{1-\nu}+\eta\Big)\Big]\\
&\qquad + e^{-\eta}\Big[+\lambda+\gamma_2\Big(+\frac{2}{1-\nu}-\eta\Big)\Big]\Big\}\cos\xi\,.
\end{aligned}
$$

Damit lassen sich nun die Randwerte $\overset{0}{R}\ldots$ und $\overset{1}{R}\ldots$ aus den Gleichungen (24), (25), (26), (27) und (33) unter Beachtung ihrer Definitionen (1) und (4) berechnen:

$$
\begin{aligned}
\overset{0}{R}_{22} &= -\frac{a}{h\lambda\,\Delta_1}(+\mathfrak{Sin}\,2\lambda+2\lambda)\,, & \overset{1}{R}_{22} &= +\frac{2a}{h\lambda\,\Delta_1}(+\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda+\mathfrak{Sin}\,\lambda)\,,\\
\overset{0}{R}_{12} &= +\frac{a(1-\nu)}{h\lambda\,\Delta_1}\Big(+\mathfrak{Sin}^2\lambda+\lambda^2\frac{1+\nu}{1-\nu}\Big)\,, & \overset{1}{R}_{12} &= -\frac{2a}{h\,\Delta_1}\mathfrak{Sin}\,\lambda\,,\\
\overset{0}{R}_{24} &= +\frac{a(1-\nu)}{h\lambda\,\Delta_1}\Big(+\mathfrak{Sin}^2\lambda+\lambda^2\frac{1+\nu}{1-\nu}\Big)\,, & \overset{1}{R}_{21} &= -\frac{2a}{h\,\Delta_1}\mathfrak{Sin}\,\lambda\,,\\
\overset{0}{R}_{44} &= -\frac{a}{h\lambda\,\Delta_1}+(\mathfrak{Sin}\,2\lambda-2\lambda)\,, & \overset{1}{R}_{44} &= +\frac{2a}{h\lambda\,\Delta_1}(+\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda-\mathfrak{Sin}\,\lambda)\,,\\
\overset{0}{R}_{31} &= -\frac{1}{h\lambda^2\varkappa\,\Delta_2}\frac{(1+\nu)^2}{(1-\nu)} & \overset{1}{R}_{31} &= +\frac{2}{h\lambda\varkappa\,\Delta_2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}\,\lambda\,,\\
&\quad\times\Big(+\frac{3+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}^2\lambda-\frac{1-\nu}{1+\nu}\lambda^2\Big)\,,\\
\overset{0}{R}_{11} &= +\frac{1}{h\lambda\,a\varkappa\,\Delta_2}\frac{1+\nu}{1-\nu} & \overset{1}{R}_{11} &= -\frac{2}{h\lambda\,a\varkappa\,\Delta_2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\\
&\quad\times\Big(+\frac{3+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}\,2\lambda-2\lambda\Big)\,, & &\quad\times\Big(+\frac{3+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}\,\lambda-\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\Big)\,,\\
\overset{0}{R}_{33} &= -\frac{a}{h\lambda^3\varkappa\,\Delta_2}\frac{1+\nu}{1-\nu} & \overset{1}{R}_{33} &= -\frac{2a}{h\lambda^3\varkappa\,\Delta_2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\\
&\quad\times\Big(+\frac{3+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}\,2\lambda+2\lambda\Big)\,, & &\quad\times\Big(+\frac{3+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}\,\lambda+\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\Big)\,,\\
\overset{0}{R}_{13} &= +\frac{1}{h\lambda^2\varkappa\,\Delta_2}\frac{(1+\nu)^2}{(1-\nu)} & \overset{1}{R}_{13} &= -\frac{2}{\lambda h\varkappa\,\Delta_2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}\,\lambda\,,\\
&\quad\times\Big(+\frac{3+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}^2\lambda-\frac{1-\nu}{1+\nu}\lambda^2\Big)\,,\\
\overset{0}{R}_{20} &= +\frac{p_{yn}a^2}{h\lambda^2\,\Delta_3}(1-\nu) & \overset{1}{R}_{20} &= -\frac{p_{yn}a^2}{h\lambda^2\,\Delta_3}(1-\nu)\\
&\quad\times\Big(+\mathfrak{Sin}\,\lambda+\lambda\frac{1+\nu}{1-\nu}\Big)\,, & &\quad\times\Big(+\mathfrak{Sin}\,\lambda+\lambda\frac{1+\nu}{1-\nu}\Big)\,,\\
\overset{0}{R}_{40} &= -\frac{p_{yn}\,2a}{h\lambda\,\Delta_3}(+\mathfrak{Cof}\,\lambda-1)\,, & \overset{1}{R}_{40} &= +\frac{p_{yn}\,2a}{h\lambda\,\Delta_3}(+\mathfrak{Cof}\,\lambda-1)\,,\\
\overset{0}{R}_{30} &= +p_{zz}\frac{a^2(1-\nu)^2}{h\lambda^4\varkappa} & \overset{1}{R}_{30} &= +p_{zz}\frac{a^2(1-\nu^2)}{h\lambda^4\varkappa}\\
&\quad\times\Big[1+\frac{\nu}{(1-\nu)\,\Delta_4}\Big(\frac{1+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}\,\lambda-\lambda\Big)\Big]\,, & &\quad\times\Big[1+\frac{\nu}{(1-\nu)\,\Delta_4}\Big(\frac{1+\nu}{1-\nu}\mathfrak{Sin}\,\lambda-\lambda\Big)\,,\\
\overset{0}{R}_{10} &= -p_{zz}\,\nu\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{2a}{h\lambda^3\varkappa\,\Delta_4}(\mathfrak{Cof}\,\lambda-1)\,, & \overset{1}{R}_{10} &= -p_{zz}\,\nu\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{2a}{h\lambda^3\varkappa\,\Delta_4}(\mathfrak{Cof}\,\lambda-1)\,.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

7. Sonderfall verschwindender Kantenwinkel. Die vorliegende strenge Theorie der prismatischen Faltwerke gilt auch für den Sonderfall mit verschwindenden Kantenwinkeln φ_j. Das Tragsystem zerfällt dann je nach Art der äußeren Belastung in ein Plattenwerk bzw. in ein Scheibenwerk.

Im Falle einer Belastung senkrecht zur Ebene ergibt sich ein System von durchlaufenden Platten, die in Abständen durch elastische Träger unterstützt sind (Abb. 6). Damit ist die

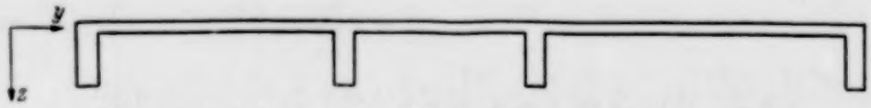

Abb. 6. Querschnitt einer über elastischen Trägern durchlaufenden Platte.

Frage der mitwirkenden Plattenbreite von Trägern, die mit kreuzweise bewehrten Platten monolithisch verbunden sind, bei Berücksichtigung ihrer Verdrehungssteifigkeit eindeutig geklärt. Die mitwirkende Breite wird im wesentlichen von dem Verschiebungszustand der Platten zwischen den Trägern abhängen. Die Lösung bei beliebiger senkrechter Belastung ist durch ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Anschlußkräfte gegeben.

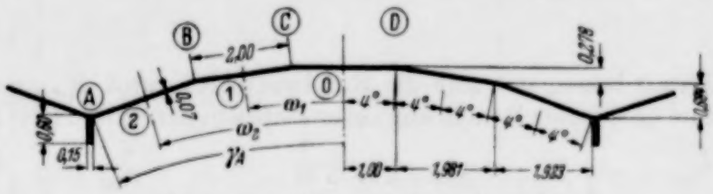

Abb. 8. Querschnitt einer Faltwerkreihe.

Abb. 7. Querschnitt einer anisotropen Scheibe.

Im Falle einer Belastung in Richtung der Ebene entsteht das Tragsystem einer anisotropen Scheibe (Abb. 7). Die verschiedenen Querschnittswerte der Einzelteile finden exakt Berücksichtigung. Zur Berechnung werden die Tragglieder durch Längsschnitte voneinander getrennt und die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen der Schnittufer durch die Wirkung überzähliger Größen erfüllt.

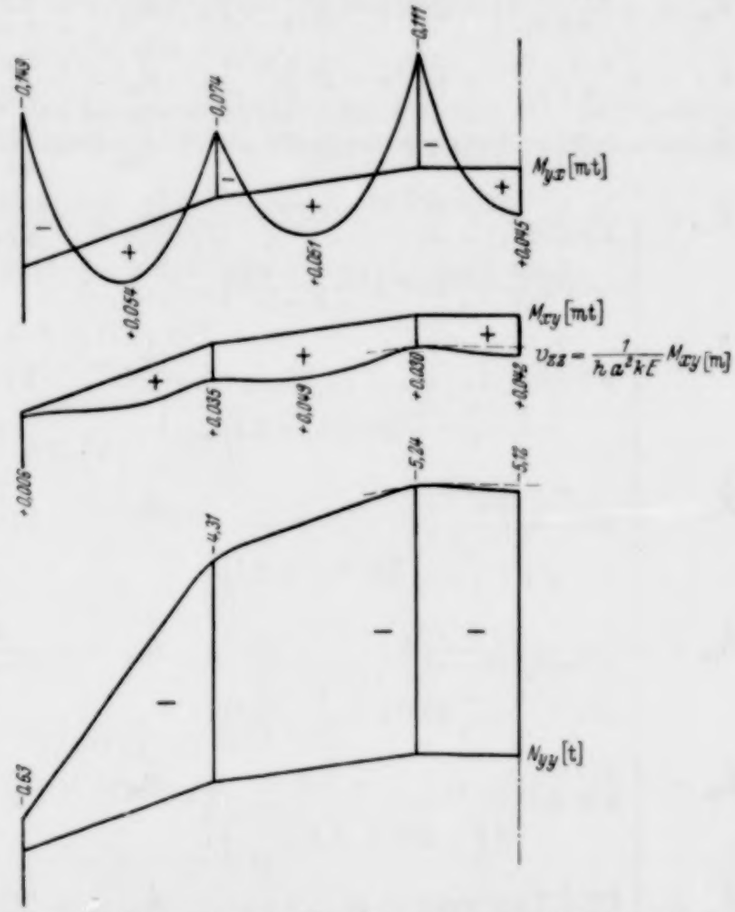

Abb. 9. Schnittkraftverlauf M_{yx}, M_{xy}, v_{zz}, N_{yy} des Faltwerkes im Mittelquerschnitt $x = 0$.
——— Schnittkräfte im Faltwerk;
····· Schnittkräfte der dem Faltwerk einbeschriebenen Zylinderschale.

8. Anwendungen. Die dargelegte Theorie der anisotropen Faltwerke hat gegenüber den bisherigen Berechnungsverfahren nicht nur hinsichtlich ihrer allgemeineren Gültigkeit, sondern auch wegen der Übersichtlichkeit des Rechnungsganges manchen Vorteil.

In Abb. 8 ist der Mittelquerschnitt einer von den üblichen Abmessungen abweichenden Faltwerkreihe zwischen zwei Binderscheiben dargestellt. Alle Platten werden durch die Form-

größe $\lambda = n\,\pi\,a/L = 2$ beschrieben, so daß für das erste Lastglied der Reihen (15) mit $n = 1$ und der Länge $L = \pi$ ein „kurzes Faltwerk" (analog der kurzen Zylinderschale) oder für das n-te Lastglied ein „quasikurzes" Faltwerk der Länge $L = n\,\pi$ vorgegeben ist. Die Abb. 9 zeigt für die konstante Flächenbelastung von 0,310 t/m² jeder Platte bei einer Randträgerlast von 0,130 t/m den Verlauf der beiden Biegemomente, der Normalverschiebung und der Längskraft N_{yy} im Querschnitt. Zum Vergleich der berechneten Größen sind in der Scheitelzone die entsprechenden Werte der Partikularlösung der dem Faltwerk einbeschriebenen isotropen Kreiszylinderschale mit dem Radius 14,3 m eingetragen worden. Es zeigt sich erwartungsgemäß eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse. Für das Faltwerk ist zu bemerken, daß die Verschiebungen v_{zz} und damit auch die Biegemomente M_{xy} zwischen den Kanten

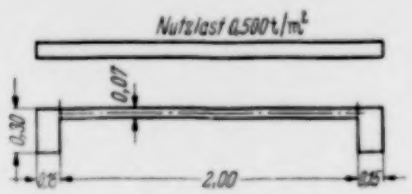

Abb. 10. Abmessungen der durch Randträger ausgesteiften Platte.

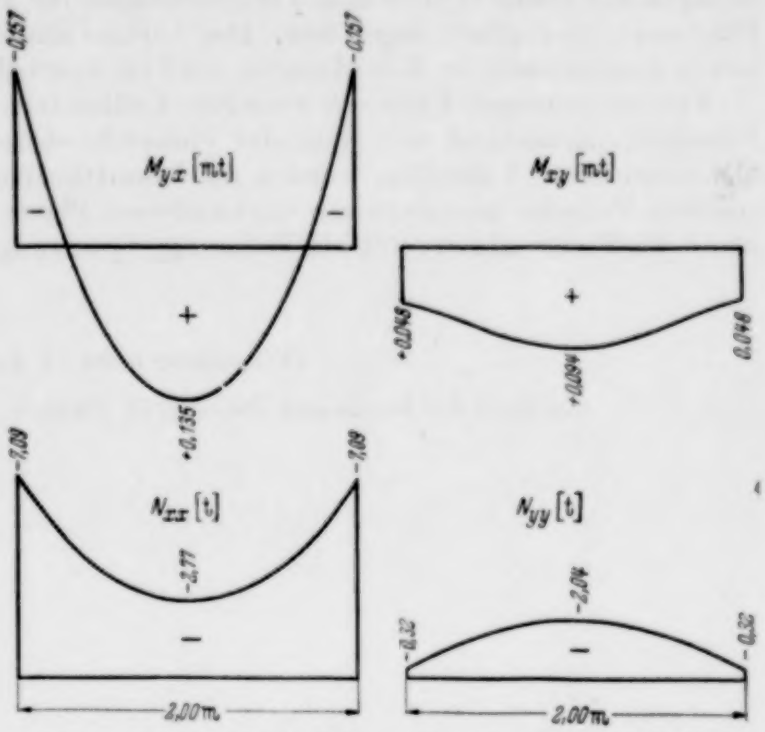

Abb. 11. Schnittkraftverlauf M_{yx}, M_{xy}, N_{xx}, N_{yy} im Mittelquerschnitt der Platte des Tragsystems nach Abb. 10.

größere Werte annehmen als bei der Zylinderschale, da die gesamte Flächenbelastung der Platten durch Biegung abgetragen werden muß.

In der Abb. 10 wurde eine der das Faltwerk erzeugenden Platten mit zwei Randträgern biegesteif verbunden. Im Schnitt zwischen Randträger und Platte greifen die vier Schnittgrößen M_{yx}, N_{yy}, $\bar{Q}_{yz}$ und N_{yx} an, die die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen der Schnittufer erfüllen. Außer dem Eigengewicht wirkt die Nutzbelastung 0,500 t/m² (Abb. 10). Der Verlauf der Schnittkräfte M_{yx}, M_{xy}, N_{xx} und N_{yy} ist für das erste Lastglied durch Abb. 11 dargestellt. Die Randträger werden auf schiefe Biegung mit Längskraft und Torsion beansprucht. Die Längsspannungsverteilung zeigt Abb. 12.

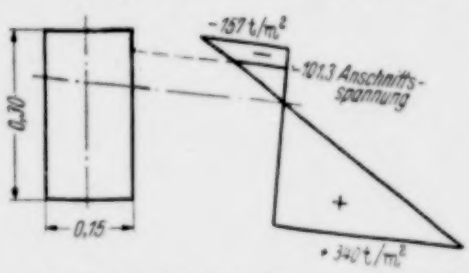

Abb. 12. Längsspannungen σ_{xx} im Randträger des Tragwerkes nach Abb. 10.

9. Zusammenfassung. Zur Berechnung der Spannungen und Verschiebungen in dem aus Stäben, Platten und Schalenelementen zusammengesetzten Faltwerk werden die Einzelteile durch Längsschnitte in den Verbindungsstellen getrennt. Die in den Schnitten wirkenden Verbindungskräfte erfüllen die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen der Formänderungen der Schnittufer, wenn diese einem linearen Gleichungssystem genügen. Die Ableitung zeigt, daß in jedem Falle die Aufstellung der Gleichungen für beliebige Bedingungen an den Rändern $\pm L/2$ des Faltwerkes möglich ist. Die Vorzahlen der Matrix sind neben den trigonometrischen Werten der Schnittwinkel Funktionen von Verschiebungsgrößen $\dot{R}$ . . für Randbelastungszustände der Faltwerkelemente. Diese können für beliebige orthogonale Anisotropie nach den bekannten Theorien der Stäbe, Scheiben, Platten und Zylinderschalen berechnet werden. Die Auflösung der Bedingungsgleichungen liefert die Verbindungskräfte in den Kanten, welche mit der Lösung für die Flächenbelastung den Spannungs- und Verschiebungszustand in jedem Punkt der Elemente bestimmen.

Die vorliegende Theorie ist auch auf den Sonderfall verschwindender Kantenschnittwinkel anwendbar. Im Falle einer senkrecht zur Plattenebene wirkenden äußeren Belastung entsteht ein System mehrfach zusammenhängender Platten, die mit elastischen Trägern verbunden

7. Sonderfall verschwindender Kantenwinkel. Die vorliegende strenge Theorie der prismatischen Faltwerke gilt auch für den Sonderfall mit verschwindenden Kantenwinkeln φ_j. Das Tragsystem zerfällt dann je nach Art der äußeren Belastung in ein Plattenwerk bzw. in ein Scheibenwerk.

Im Falle einer Belastung senkrecht zur Ebene ergibt sich ein System von durchlaufenden Platten, die in Abständen durch elastische Träger unterstützt sind (Abb. 6). Damit ist die

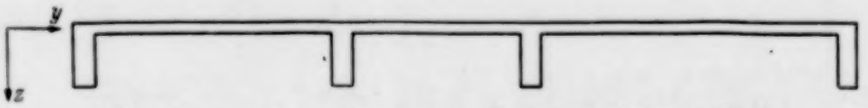

Abb. 6. Querschnitt einer über elastischen Trägern durchlaufenden Platte.

Frage der mitwirkenden Plattenbreite von Trägern, die mit kreuzweise bewehrten Platten monolithisch verbunden sind, bei Berücksichtigung ihrer Verdrehungssteifigkeit eindeutig geklärt. Die mitwirkende Breite wird im wesentlichen von dem Verschiebungszustand der Platten zwischen den Trägern abhängen. Die Lösung bei beliebiger senkrechter Belastung ist durch ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Anschlußkräfte gegeben.

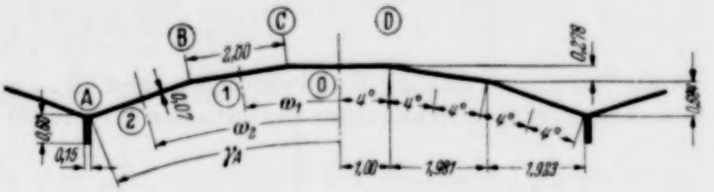

Abb. 8. Querschnitt einer Faltwerkreihe.

Abb. 7. Querschnitt einer anisotropen Scheibe.

Im Falle einer Belastung in Richtung der Ebene entsteht das Tragsystem einer anisotropen Scheibe (Abb. 7). Die verschiedenen Querschnittswerte der Einzelteile finden exakt Berücksichtigung. Zur Berechnung werden die Tragglieder durch Längsschnitte voneinander getrennt und die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen der Schnittufer durch die Wirkung überzähliger Größen erfüllt.

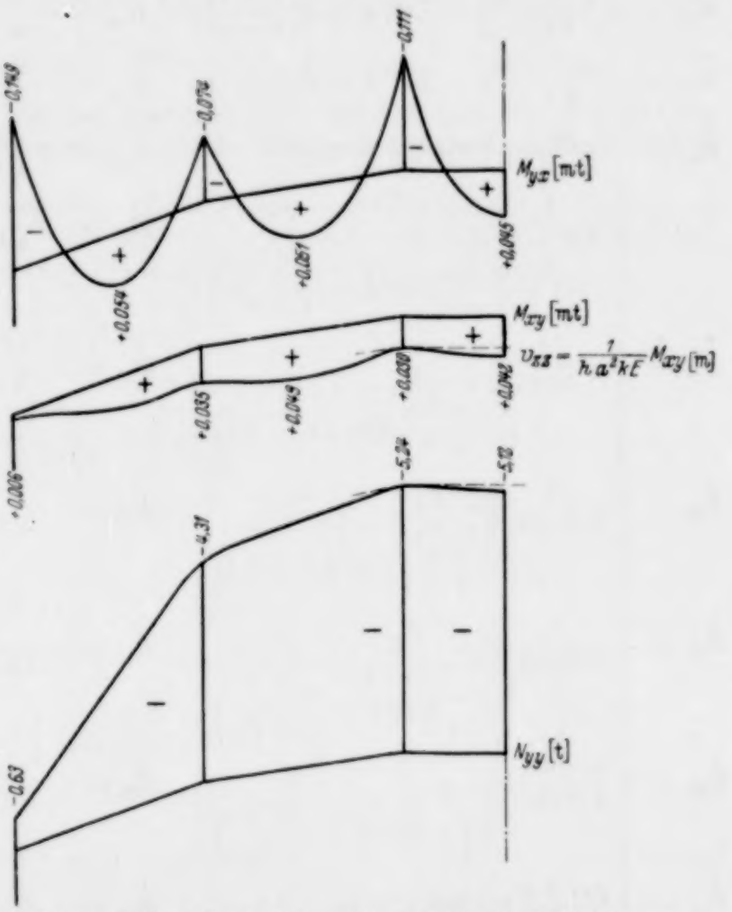

Abb. 9. Schnittkraftverlauf M_{yx}, M_{xy}, v_{xz}, N_{yy} des Faltwerkes im Mittelquerschnitt $x = 0$.
——— Schnittkräfte im Faltwerk;
····· Schnittkräfte der dem Faltwerk einbeschriebenen Zylinderschale.

8. Anwendungen. Die dargelegte Theorie der anisotropen Faltwerke hat gegenüber den bisherigen Berechnungsverfahren nicht nur hinsichtlich ihrer allgemeineren Gültigkeit, sondern auch wegen der Übersichtlichkeit des Rechnungsganges manchen Vorteil.

In Abb. 8 ist der Mittelquerschnitt einer von den üblichen Abmessungen abweichenden Faltwerkreihe zwischen zwei Binderscheiben dargestellt. Alle Platten werden durch die Form-

größe $\lambda = n\,\pi\,a/L = 2$ beschrieben, so daß für das erste Lastglied der Reihen (15) mit $n = 1$ und der Länge $L = \pi$ ein „kurzes Faltwerk" (analog der kurzen Zylinderschale) oder für das n-te Lastglied ein „quasikurzes" Faltwerk der Länge $L = n\,\pi$ vorgegeben ist. Die Abb. 9 zeigt für die konstante Flächenbelastung von 0,310 t/m² jeder Platte bei einer Randträgerlast von 0,130 t/m den Verlauf der beiden Biegemomente, der Normalverschiebung und der Längskraft N_{yy} im Querschnitt. Zum Vergleich der berechneten Größen sind in der Scheitelzone die entsprechenden Werte der Partikularlösung der dem Faltwerk einbeschriebenen isotropen Kreiszylinderschale mit dem Radius 14,3 m eingetragen worden. Es zeigt sich erwartungsgemäß eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse. Für das Faltwerk ist zu bemerken, daß die Verschiebungen v_{zz} und damit auch die Biegemomente M_{xy} zwischen den Kanten

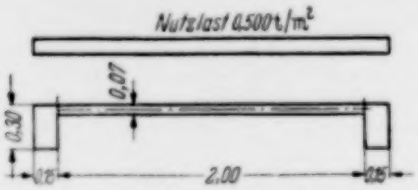

Abb. 10. Abmessungen der durch Randträger ausgesteiften Platte.

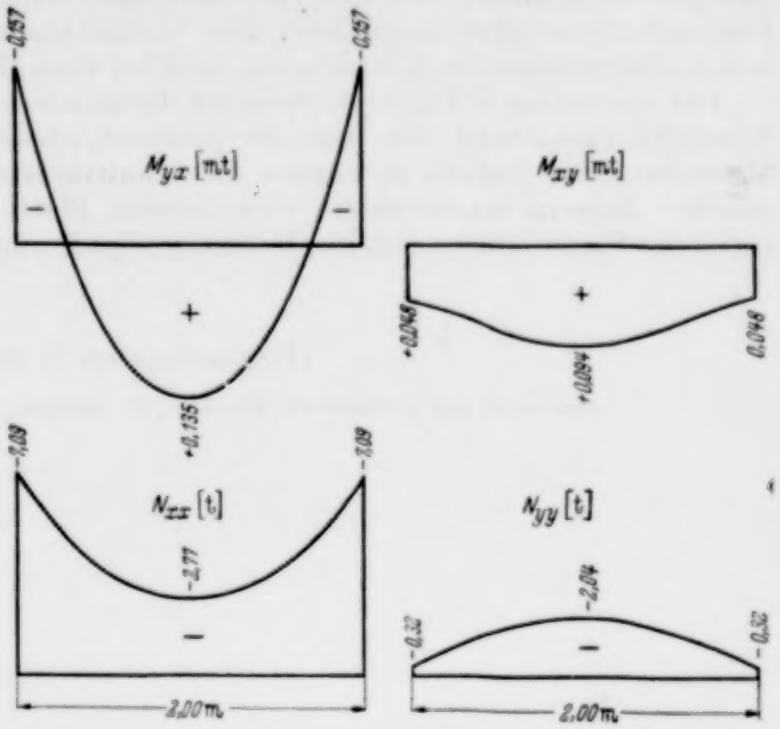

Abb. 11. Schnittkraftverlauf M_{yx}, M_{xy}, N_{xx}, N_{yy} im Mittelquerschnitt der Platte des Tragsystems nach Abb. 10.

größere Werte annehmen als bei der Zylinderschale, da die gesamte Flächenbelastung der Platten durch Biegung abgetragen werden muß.

In der Abb. 10 wurde eine der das Faltwerk erzeugenden Platten mit zwei Randträgern biegesteif verbunden. Im Schnitt zwischen Randträger und Platte greifen die vier Schnittgrößen M_{yx}, N_{yy}, $\bar{Q}_{yz}$ und N_{yx} an, die die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen der Schnittufer erfüllen. Außer dem Eigengewicht wirkt die Nutzbelastung 0,500 t/m² (Abb. 10). Der Verlauf der Schnittkräfte M_{yx}, M_{xy}, N_{xx} und N_{yy} ist für das erste Lastglied durch Abb. 11 dargestellt. Die Randträger werden auf schiefe Biegung mit Längskraft und Torsion beansprucht. Die Längsspannungsverteilung zeigt Abb. 12.

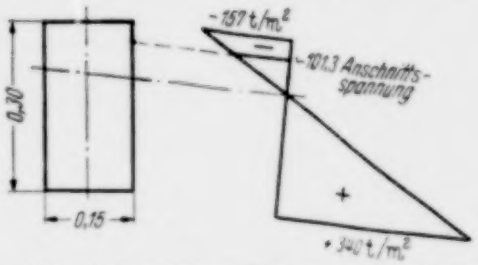

Abb. 12. Längsspannungen σ_{xx} im Randträger des Tragwerkes nach Abb. 10.

9. Zusammenfassung. Zur Berechnung der Spannungen und Verschiebungen in dem aus Stäben, Platten und Schalenelementen zusammengesetzten Faltwerk werden die Einzelteile durch Längsschnitte in den Verbindungsstellen getrennt. Die in den Schnitten wirkenden Verbindungskräfte erfüllen die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen der Formänderungen der Schnittufer, wenn diese einem linearen Gleichungssystem genügen. Die Ableitung zeigt, daß in jedem Falle die Aufstellung der Gleichungen für beliebige Bedingungen an den Rändern $\pm L/2$ des Faltwerkes möglich ist. Die Vorzahlen der Matrix sind neben den trigonometrischen Werten der Schnittwinkel Funktionen von Verschiebungsgrößen $\dot{R}$ . . für Randbelastungszustände der Faltwerkelemente. Diese können für beliebige orthogonale Anisotropie nach den bekannten Theorien der Stäbe, Scheiben, Platten und Zylinderschalen berechnet werden. Die Auflösung der Bedingungsgleichungen liefert die Verbindungskräfte in den Kanten, welche mit der Lösung für die Flächenbelastung den Spannungs- und Verschiebungszustand in jedem Punkt der Elemente bestimmen.

Die vorliegende Theorie ist auch auf den Sonderfall verschwindender Kantenschnittwinkel anwendbar. Im Falle einer senkrecht zur Plattenebene wirkenden äußeren Belastung entsteht ein System mehrfach zusammenhängender Platten, die mit elastischen Trägern verbunden

sind. Damit kann auch die Frage der mitwirkenden Plattenbreite von Trägern unter kreuzweise bewehrten Platten beantwortet werden. Wirkt die äußere Belastung in der Plattenebene, entsteht das Tragsystem einer orthogonal anisotropen Scheibe.

Für die zunächst am meisten interessierenden isotropen Scheiben und Platten sind die Gleichungen der Schnittkräfte und Verschiebungen für harmonische Randbelastungszustände und Flächenkräfte explizit angegeben. Der Verlauf innerhalb der Platten und Scheiben, beschrieben in dimensionslosen Koordinaten, wird im wesentlichen durch einen Parameter $\hat{\lambda}$ bestimmt.

Für ein isotropes Faltwerk zwischen Endbindern wurde gezeigt, daß der Spannungs- und Verschiebungszustand mit dem der einbeschriebenen Zylinderschale erwartungsgemäß gut übereinstimmt. Außerdem wurden die Schnittkräfte und Verschiebungen einer mit zwei elastischen Trägern monolythisch verbundenen Platte berechnet. Zu dem Biegespannungszustand der Platte addiert sich ein Dehnungs-Spannungszustand.

(Eingegangen am 13. Juni 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *D. Rüdiger*, Freiberg/Sa., Wernerplatz 9.

Soeben erschien:

Taschenbuch für Bauingenieure

Mit Beiträgen zahlreicher Fachgelehrter

Herausgegeben von

Professor Dr.-Ing. **Ferdinand Schleicher**
Dortmund

Zweite völlig neubearbeitete Auflage

Mit 2740 Abbildungen. XX, 1087 und XIX, 1159 Seiten 8°. 1955

In zwei Bänden. Ganzleinen DM 56,—

Inhaltsübersicht:

Erster Band: **Mathematik.** Von Professor Dr. phil. W. Rosemann, Gronau i. Hannover. — **Mechanik starrer Körper.** Von Professor Dr.-Ing. Docteur ès Sciences h. c. F. Tölke, Stuttgart. — **Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie.** Von Dr.-Ing. W. Flügge, Professor an der Standford University Palo Alto, Cal. (USA). — **Baustatik.** Von Dr.-Ing. E. Kohl, o. Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. — **Baustoffe und ihre Eigenschaften.** Von Dr.-Ing. E. h. Otto Graf, o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. — **Baukonstruktionen des Hochbaus.** Von Regierungsbaumeister Leopold Sautter, Stuttgart. — **Holzbau.** Von Dr.-Ing. habil. W. Stoy, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. — **Stahlbau.** Von Professor Dr.-Ing. Ferd. Schleicher, Dortmund. — **Stahlhochbau.** Von Dr.-Ing. H. P. Witt, Dortmund. — **Massivbau.** Von Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h., Dr. Ing. E. h., Dr. techn. h. c. Franz Dischinger †, weiland o. Professor an der Techn. Universität Berlin, ergänzt und überarbeitet von Dr.-Ing. Alfred Mehmel, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. — **Ausgewählte Kapitel aus der Theorie des Brückenbaues.** Von Dr. sc. techn. F. Stüssi, o. Professor an der Eidgen. Technischen Hochschule Zürich. — **Stabilitätsfälle** (Grundlagen von Knicken, Kippen und Beulen). Von Professor Dr.-Ing. Ferd. Schleicher, Dortmund. — **Schwingungen in der Bautechnik.** Von Professor Dr.-Ing. F. W. Waltking †, Düsseldorf. — **Sachverzeichnis** des ersten Bandes.

Zweiter Band: **Bodenmechanik.** Von Dr.-Ing. habil. H. Petermann, Bremen. — **Erdbau.** Von Dr.-Ing., Dr.-Ing. E. h. W. Müller und Dr. G. Garbotz, o. Professoren an der Technischen Hochschule Aachen. — **Tunnel- und Stollenbau.** Von Dipl.-Ing. Karl Hetzel, o. Professor an der Technischen Hochschule München. — **Grundbau.** Von Professor Dr.-Ing., Dr.-Ing. E. h. A. Agatz und Dr.-Ing. E. Lackner, Bremen. — **Verkehrswirtschaft.** Von Dr.-Ing., Dr. rer. pol. h. c., Dr.-Ing. E. h. Carl Pirath, o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. — **Flugbetrieb, Linienführung und Flughäfen des Luftverkehrs.** Von Dr.-Ing., Dr. rer. pol. h. c., Dr.-Ing. E. h. Carl Pirath, o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. — **Eisenbahnwesen.** Von Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. W. Müller, o. Professor an der Technischen Hochschule Aachen. — **Oberbau und Gleisverbindungen.** Von Professor Dr.-Ing. Erwin Massute, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. — **Bahnen besonderer Bauart.** Von Dipl.-Ing. Dr. techn. E. Czitary, o. Professor an der Technischen Hochschule Wien. — **Grundlagen der Straßenverkehrsplanung.** Von Dr.-Ing. habil. Johannes Schlums, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. — **Straßenbau und Straßenverkehrstechnik.** Von Dr.-Ing. habil. Johannes Schlums, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. — **Technische Hydromechanik.** Von Dr.-Ing., Dr.-Ing. E. h. P. Böss, o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. — **Wasserwirtschaft.** Von Dr.-Ing. H. Wittmann, o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. — **Stauanlagen** (Wehre und Talsperren). Von Dr.-Ing., Dr.-Ing. E. h. P. Böss, o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. — **Wasserkraftanlagen.** Von Dr.-Ing. H. Wittmann, o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. — **Flußbau.** Von Dr.-Ing. H. Wittmann, o. Professor an den Technische Hochschule Karlsruhe. — **Binnenverkehrswasserbau.** Von Präsident Karl Hilfer, Münster/W. — **Seeverkehrswasserbau.** Von Professor Dr.-Ing., Dr.-Ing. E. h. A. Agatz, Präsident der Hafenbauverwaltung Bremen, und Hafenbaudirektor Dr.-Ing. R. Lutz, Bremen. — **Städtebau.** Von Stadtbaurat a. D. Dr.-Ing. E. h. J. Göderitz, o. Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. — **Vermessungskunde.** Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister †, bearbeitet von Dr.-Ing. G. Lehmann, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. — **Wasserversorgung und Entwässerung der Stadt- und Landgemeinden, landwirtschaftlicher Wasserbau.** Von Professor Dr.-Ing. Erwin Marquardt, Technische Hochschule Stuttgart. — **Maschinenkunde des Bauingenieurs** (einschl. Elektrotechnik). Von Dr.-Ing. habil. A. Vierling, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. — **Sachverzeichnis des zweiten Bandes.**

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Theorie ideal plastischer Körper.

Von **William Prager**, Eng. D., Professor of Applied Mechanics, Brown University, Providence, R. I., U.S.A. und **Philip G. Hodge**, Jr. Ph. D., Associate Professor of Applied Mechanics, Polytechnic Institute of Brooklyn, N. Y., U.S.A. Ins Deutsche übertragen von Fritz Chmelka, Dr. phil., Dr. techn., Privatdozent an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 97 Textabbildungen. X, 274 Seiten Gr.-8°. 1954.

Ganzleinen DM 33,—

Inhaltsübersicht: **Einleitung.** — **Grundlagen.** Die Spannung. Die Formänderung (Verzerrung). Die Gleichgewichtsbedingungen. Einfache Spannungs-Verzerrungsbeziehungen. Fließbedingungen. Spannungs-Verzerrungsbeziehungen im plastischen Bereich. — **Fachwerke und Balken.** Das elastisch-plastische Verhalten eines einfachen Fachwerkes. Biegung eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt. — **Torsion zylindrischer oder prismatischer Stäbe.** Elastische Torsion. Vollplastische und elastisch-plastische Spannungsverteilung. Beispiele. Die Wölbung des Querschnitts. Die Beziehungen zwischen den Theorien von Saint Venat-Mises und von Prandtl-Reuß bei ihrer Anwendung auf das Torsionsproblem. Kombinierte Torsions- und Zugbeanspruchung eines Kreiszylinders. — **Ebener Verzerrungszustand: Probleme mit axialer Symmetrie.** Allgemeine Beziehungen. Inkompressibles Material. Entlastung und wiederholte Belastung. Uneingeschränktes plastisches Fließen. — **Ebener Verzerrungszustand: Allgemeine Theorie.** Einleitung. Allgemeine Begriffe. Geometrische Eigenschaften der Gleitlinien. Randbedingungen; Näherungsweise Konstruktion von Gleitlinien. Geschwindigkeitsfelder. Scharen gerader Gleitlinien. Grenzlinien. Unstetigkeitslinien. — **Ebener Verzerrungszustand: Besondere Probleme.** Probleme des beginnenden, stationären und pseudostationären plastischen Fließens. — **Ebener Verzerrungszustand: Eingeschränkte plastische Verformung. Traglastverfahren.** Die Plattenanalogie. Analytische Behandlung eines speziellen Falles. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten bei ebener Verzerrung. Traglastverfahren bei ebener Verzerrung. Lösungen nach der Saint Venant-Misesschen Theorie und das beginnende plastische Fließen eines Prandtl-Reußschen Materials. — **Extremalprinzipe.** Einführung. Cartesische Tensoren. Extremalprinzipe der Misesschen und der Prandtl-Reußschen Theorie. Traglastverfahren. Einige Bemerkungen betreffend die Anwendung von Extremalprinzipien. — **Namen- und Sachverzeichnis.** Aufgaben und Literatur am Ende jedes Kapitels. Verzeichnis der im Text angeführten englischen Fachausdrücke.

SPRINGER-VERLAG · WIEN

Aufgaben aus der Technischen Mechanik

Graphische Statik, Festigkeitslehre, Dynamik fester Körper. Von Dr.-Ing. **Rudolf Sonntag**, o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Mit 324 Abbildungen. XI, 209 Seiten Gr.-8°. 1955.

DM 16,50; Ganzleinen DM 19,50

Der Studierende der Ingenieur-Wissenschaften steht oft vor Schwierigkeiten, wenn es gilt, die verhältnismäßig einfachen Lehren der Mechanik auf bestimmte praktische Fragestellungen anzuwenden. Diese auf langjährige Unterrichtserfahrung aufgebaute Aufgabensammlung bringt deshalb die Lösungen der — größtenteils aus der technischen Praxis stammenden — Aufgaben in großer Ausführlichkeit, so daß auch der durchschnittlich Begabte oder der für Theorie weniger Veranlagte zu folgen vermag, selbst dann, wenn die Aufgabe höhere Ansprüche an ihn stellt.

Besonderes Gewicht wurde auf die Anwendung gewisser Sätze und Methoden der Technischen Mechanik gelegt, die, wie das Prinzip von *d'Alembert* die Sätze von *Gastigliano* und *Coriolis* die Freimachungs- und Schnittmethoden, dem Anfänger größere Schwierigkeiten zu bereiten pflegen. Um schon den angehenden Ingenieur mit Problemen bekannt zu machen, die erst in jüngster Zeit in der techischen Praxis aufgetaucht sind, wurden in verschiedenen Aufgaben Fragen berührt, deren Klärung durch die Technische Mechanik von entscheidender Bedeutung für die Verwirklichung neuartiger Konstruktionsgedanken gewesen ist.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Diesem Heft liegen 1 Prospekt des Springer-Verlages, Berlin / Göttingen / Heidelberg und 1 Prospekt des Springer-Verlages, Wien, bei.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040.